

Beiträge zur übertragerfreien
Realisierung von Übertragungs-
funktionen mit Hilfe von überbrückten
T-Gliedern und abgewandelten
Netzwerkstrukturen

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

vorgelegt von
Willi Hohneker

Erlangen 1974

Beiträge zur übertragerfreien
Realisierung von Übertragungs-
funktionen mit Hilfe von überbrückten
T-Gliedern und abgewandelten
Netzwerkstrukturen

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

vorgelegt von
Willi Hohneker

Erlangen 1974



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 10. Juli 1974

Tag der Promotion: 30. September 1974

Dekan: Prof. Dr. phil. nat. H. Schlitt

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen

Prof. Dr.-Ing. D. Seitzer

INHALT

1. EINFÜHRUNG	3
2. DAS ÜBERBRÜCKTE T-GLIED	9
2.1. Allgemeines	9
2.2. Die Realisierungsbedingungen für überbrückte T-Glieder	11
2.3. Notwendige Bedingungen für die Realisierbarkeit von Übertragungsfunktionen durch Kettenanord- nungen überbrückter T-Glieder	13
3. DIE VERWIRKLICHUNG VON MINDESTPHASEN-ÜBERTRAGUNGS- FUNKTIONEN DURCH KETTENANORDNUNGEN ÜBERBRÜCKTER T-GLIEDER MIT KANONISCH UND ÜBERTRAGERFREI REALI- SIERBAREN IMPEDANZEN VON HÖCHSTENS ZWEITEM GRAD	14
3.1. Vorbemerkungen	14
3.2. Übertragungsfunktionen ersten Grades	16
3.2.1. Funktionen mit einer Nullstelle bei $p=\infty$	16
3.2.2. Funktionen mit von Null verschiedenem Funktionswert bei $p=\infty$	17
3.3. Übertragungsfunktionen zweiten Grades	17
3.3.1. Einige Sätze	17
3.3.2. Funktionen mit einer doppelten Nullstelle bei $p=\infty$	23
3.3.3. Funktionen mit einer einfachen Nullstelle bei $p=\infty$	25
3.3.4. Funktionen mit von Null verschiedenem Funktionswert bei $p=\infty$	33
3.3.4.1. Bedingungen für die Realisierbarkeit durch ein Übertragerfreies überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern	33
3.3.4.2. Funktionen mit reellen Nullstellen und Polen	54
3.3.4.3. Funktionen, die nicht durch ein Übertrager- freies überbrücktes T-Glied mit vier Energie- speichern realisiert werden können	61
3.4. Ergänzende Bemerkungen	74

4. DIE REALISIERUNG SPEZIELLER MINDESTPHASEN-ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN DRITTEN UND HÖHEREN GRADES DURCH EIN EINZELNES ÜBERBRÜCKTES T-GLIED	76
4.1. Vorbemerkungen	76
4.2. Die Realisierungsbedingungen für Reihenschaltungen von Zweipolen mit jeweils höchstens zwei Energiespeichern	77
4.3. Die Realisierungsbedingungen für Parallelschaltungen von Zweipolen mit jeweils höchstens zwei Energiespeichern	82
5. ÜBERBRÜCKTE T-NETZWERKE MIT ÜBERTRAGUNGSNULLSTELLEN IN DER RECHTEN FREQUENZHALBEBENE	84
6. MÖGLICHKEITEN ZUR EINSPARUNG VON ENERGIESPEICHERN	89
6.1. Das Verfahren von E.C. HO	89
6.2. Eine weitere Möglichkeit zur Einsparung von Energiespeichern	92
6.2.1. Der Grundgedanke	92
6.2.2. Funktionen mit einer doppelten Nullstelle bei $p=\infty$	97
6.2.3. Funktionen mit einer einfachen Nullstelle bei $p=\infty$	100
6.2.4. Funktionen mit zwei reellen Polen	104
6.2.5. Funktionen mit zwei reellen Nullstellen	106
6.2.6. Funktionen mit nicht-reellen Nullstellen und Polen	112
7. ANWENDUNGSBEISPIELE	121
ZUSAMMENFASSUNG	137
ANHANG I	139
ANHANG II	147
ANHANG III	150
LITERATURVERZEICHNIS	156

1. EINFÜHRUNG

Ein Teilproblem bei der Entwicklung von Nachrichtenübertragungssystemen besteht im Entwurf von Zweitorschaltungen, mit denen die linearen Verzerrungen von Übertragungsstrecken kompensiert werden können. Die Vorschriften, welche an derartige Entzerrerschaltungen zu stellen sind, können beispielsweise im Frequenzbereich in der Form gegeben sein, daß die Dämpfung des aus der Übertragungsstrecke und dem Entzerrer gebildeten Systems im gesamten für die Signalübertragung maßgebenden Frequenzbereich möglichst konstant sein soll. Daneben gewinnen besonders im Hinblick auf den zunehmenden Einsatz von Einrichtungen zur Datenübertragung Entzerrervorschriften an Bedeutung, die sowohl den Dämpfungs- als auch den Phasenverlauf betreffen oder Forderungen an das zeitliche Einschwingverhalten stellen.

Der Entwurf von Kunstleitungen oder Nachbildungen von Übertragungsstrecken für Laboruntersuchungen und die Synthese von Impulsformern zur Erzeugung speziell geformter Testimpulse sind Aufgabenstellungen, die mit den bereits genannten eng verwandt sind.

Sofern man sich auf Netzwerke beschränkt, die nur ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und Übertrager enthalten dürfen und die im folgenden die Bezeichnung RLCU-Netzwerke tragen, werden bei der Lösung der geschilderten Synthesaufgaben symmetrische Zweitore bevorzugt, deren Eingangsimpedanzen bei passend gewähltem ohmschem Abschluß frequenzunabhängig sind und mit dem Abschlußwiderstand übereinstimmen. Derartige Zweitore bieten den Vorteil, daß sie sich rückwirkungsfrei, d.h. ohne sich in ihrem Übertragungsverhalten gegenseitig zu beeinflussen, in Kette schalten lassen.

Innerhalb dieser Klasse von Zweitoren nehmen die Überbrückten T-Glieder eine besondere Stellung ein. Sie benötigen nur halb so viele Energiespeicher und sind gegenüber Bauelementetoleranzen nicht so empfindlich wie beispielsweise die symmetrischen Kreuzglieder mit zueinander dualen Impedanzen, die der gleichen Klasse von Zweitoren angehören. Außerdem besitzen sie

die in vielen Anwendungsbereichen sehr erwünschte Eigenschaft einer von der Primärseite zur Sekundärseite durchgehenden Kurzschlußverbindung. Allerdings ist bei ihnen der Kreis der realisierbaren Übertragungsfunktionen stärker eingeschränkt als bei den symmetrischen Kreuzgliedern. Während mit den zuletzt genannten Netzwerkstrukturen auch Übertragungsfunktionen verwirklicht werden können, deren Nullstellen in der offenen rechten Hälfte der komplexen Frequenzebene liegen, ist dies mit überbrückten T-Gliedern grundsätzlich nicht möglich. Dadurch sind ihre Einsatzmöglichkeiten im wesentlichen auf die Synthese von Zweitoren mit vorgeschriebenem Betrags- bzw. Dämpfungsverhalten der Übertragungsfunktion beschränkt.

Über die Realisierung von Dämpfungsvorschriften durch überbrückte T-Glieder liegen bereits zahlreiche Untersuchungen vor (z.B. [1], [2], [3], [4], [5], [6]), in denen das Approximationsproblem teils auf graphischem Weg mittels Schablonen, teils mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst wird. Besonders bei den Schablonenverfahren hängt der Erfolg sehr von der Erfahrung und der Geschicklichkeit des Anwenders ab. Dies gilt aber auch bis zu einem gewissen Grad für die übrigen Verfahren, da hier die Struktur des gesuchten Zweitores, das im allgemeinsten Fall aus einer Kettenanordnung mehrerer einfach gebauter überbrückter T-Glieder gebildet wird, bereits vor Beginn des Approximationsprozesses festzulegen ist. Vor allem bei Vorschriften, die keinen monotonen Verlauf in Abhängigkeit von der Frequenz besitzen, ist die Auswahl geeigneter Netzwerkstrukturen und die Ermittlung entsprechender Startwerte für die zu optimierenden Netzwerkparameter oft recht problematisch. Eine befriedigende Lösung dürfte in derartigen Fällen - wenn überhaupt - erst nach mehreren verschiedenen Lösungsansätzen zu erreichen sein.

Im Gegensatz dazu wird in [7] der klassische Weg der Netzwerksynthese beschritten. Mit Hilfe eines Approximationsverfahrens, das alle für die spätere Realisierung notwendigen Nebenbedingungen berücksichtigt, im übrigen aber die im Rahmen dieser Nebenbedingungen gegebene Parameterfreiheit voll ausnützt, erhält man aus der Dämpfungsvorschrift eine Übertragungsfunktion,

die sich durch ein einziges Überbrücktes T-Glied als Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung verwirklichen läßt. Die beiden Impedanzen dieses Überbrückten T-Glieds können durch eines der bekannten Verfahren ([8], [9], [10]) realisiert werden. Gegenüber den zuvor genannten Methoden hat dieses Lösungsverfahren vor allem den Vorzug, daß zu Beginn der Approximation lediglich der Grad der Übertragungsfunktion festgelegt werden muß, der den notwendigen Minimalaufwand an Energiespeichern für die spätere Realisierung bestimmt. Dagegen ist keine Entscheidung hinsichtlich der Netzwerkstruktur erforderlich, die den Spielraum bei der Approximation unter Umständen unnötig einengen könnte. Andererseits bedeutet aber die Tatsache, daß die Realisierung in jedem Fall durch ein einziges Überbrücktes T-Glied erfolgt, eine nicht unerhebliche Einschränkung der Parameterfreiheit bei der Approximation im Vergleich zur Parameterfreiheit bei allgemeinen rationalen Übertragungsfunktionen. Zudem ist nicht gewährleistet, daß die Impedanzen des Überbrückten T-Glieds zugleich kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden können. Dieser Gesichtspunkt ist aber vor allem für den praktischen Schaltungsaufbau von Bedeutung.

Ein weiterer Weg zur Realisierung von Dämpfungsvorschriften stützt sich auf die Aussage, daß jede reelle rationale Mindestphasen-Übertragungsfunktion, die nur in der offenen linken Hälfte der komplexen Frequenzebene Pole besitzt, in ein Produkt von Teilübertragungsfunktionen zerlegt werden kann, die sich zumindest bis auf einen konstanten Faktor durch Überbrückte T-Glieder verwirklichen lassen ([11], [12]). Die Gesamtübertragungsfunktion wird dann, gegebenenfalls auch bis auf einen konstanten Faktor, durch das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung einer aus diesen überbrückten T-Gliedern gebildeten Kettenschaltung realisiert. Die Dämpfungsapproximation kann somit ohne Nebenbedingungen für die zu ermittelnde reelle rationale Übertragungsfunktion durchgeführt werden, wenn man von der Forderung absieht, daß keine Pole auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene auftreten dürfen. Dieser Fall ist aber bei Vorschriften,

die an stabile Systeme sinnvollerweise gestellt werden sollten, ohnehin nicht zu erwarten. Das Problem der Approximation von Betrags- bzw. Dämpfungsvorschriften mittels rationaler Funktionen darf als grundsätzlich gelöst betrachtet werden ([19]). Es erübrigt sich daher, hierüber an dieser Stelle eingehende Erörterungen anzustellen. Im übrigen ist es natürlich für das Realisierungsverfahren völlig belanglos, ob eine zu realisierende Mindestphasen-Übertragungsfunktion aufgrund einer im Frequenzbereich oder einer im Zeitbereich gestellten Vorschrift gewonnen wurde oder ob ihr irgendwelche gemischten Forderungen zugrunde lagen.

Wie noch im einzelnen zu zeigen ist, läßt es sich nicht immer vermeiden, daß eine gegebene Mindestphasen-Übertragungsfunktion mit einem geeignet zu wählenden Hilfspolynom erweitert werden muß, damit sie in ein Produkt von Teilübertragungsfunktionen zerlegt werden kann, die sich durch überbrückte T-Glieder realisieren lassen. Den zusätzlichen Aufwand an Energiespeichern, der aus solchen Erweiterungen resultiert, möglichst klein zu halten, ist eines der wesentlichen Probleme; ein weiteres ist durch die Forderung nach Übertragerfreien Netzwerken gegeben.

Die Verwirklichung von Mindestphasen-Übertragungsfunktionen durch Kettenschaltungen Übertragerfreier überbrückter T-Glieder, die jeweils höchstens vier Energiespeicher enthalten, wird in [12] im Zusammenhang mit der Synthese von Dämpfungs-entzerrern behandelt. Der dort vorgeschlagene Weg zur Bestimmung von Erweiterungspolynomen führt jedoch zu sehr aufwendigen Realisierungen. Demgegenüber wird in [11] die Aufgabe unter dem Gesichtspunkt der Realisierung mit möglichst geringem Aufwand an Energiespeichern untersucht. Die Forderung nach Übertragerfreien Netzwerken wird dabei nicht verfolgt.

Die vorliegende Arbeit behandelt zunächst die Realisierung von Mindestphasen-Übertragungsfunktionen durch Kettenanordnungen von überbrückten T-Gliedern mit jeweils höchstens vier Energiespeichern, wobei sowohl die Forderung nach Übertragerfreiheit als auch die Forderung nach möglichst geringem Gesamtauf-

wand an Energiespeichern berücksichtigt wird. Weiterhin wird darauf geachtet, daß der konstante Faktor, um den die tatsächlich realisierte Übertragungsfunktion von der gewünschten abweicht, möglichst nahe bei Eins liegt, falls dieser Wert selbst nicht erreicht werden kann.

Die Beschränkung auf überbrückte T-Glieder mit maximal vier Energiespeichern, d.h. auf Teilübertragungsfunktionen von höchstens zweitem Grad ist darin begründet, daß für diese Funktionen notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben werden können, unter denen eine Realisierung durch überbrückte T-Glieder mit kanonisch und Übertragerfrei zu verwirklichenden Impedanzen möglich ist. Bei Übertragungsfunktionen von höherem Grad ist dies dagegen nicht mehr der Fall, jedoch können wenigstens die Realisierungsbedingungen für überbrückte T-Glieder abgeleitet werden, deren Impedanzen sich durch eine Reihen- bzw. Parallelschaltung mehrerer Übertragerfreier Zweipole mit je einem oder zwei Energiespeichern kanonisch verwirklichen lassen. Hierauf wird in einem besonderen Kapitel näher eingegangen.

Weiterhin werden Zweitore mit durchgehender Kurzschlußverbindung vorgestellt, die hinsichtlich der Symmetrie und der Eingangsimpedanz bei passend gewähltem ohmschem Abschluß die gleichen Eigenschaften besitzen wie überbrückte T-Glieder, deren Übertragungsnullstellen aber im Gegensatz zu denen von überbrückten T-Gliedern nicht in der abgeschlossenen linken Hälfte der komplexen Frequenzebene liegen müssen.

Schließlich werden Möglichkeiten zur Einsparung von Energiespeichern diskutiert, die vor allem bei der Realisierung solcher Mindestphasen-Übertragungsfunktionen genutzt werden können, deren Verwirklichung durch eine Kettenschaltung von überbrückten T-Gliedern nur nach dem Erweitern mit einem geeignet zu wählenden Hilfspolynom möglich ist. Allerdings gehen dabei einige der für überbrückte T-Glieder charakteristischen Eigenschaften verloren.

Die gewonnenen Erkenntnisse und die hieraus resultierenden

Möglichkeiten bei der Lösung praktischer Realisierungsaufgaben werden an einigen Beispielen demonstriert.

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen möchte ich für sein Interesse an dieser Arbeit sowie für alle Anregungen und Ratschläge, die zu ihrer Entstehung beigetragen haben, auf diesem Wege herzlich danken. Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Seitzer gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats.

2. DAS ÜBERBRÜCKTE T-GLIED

2.1. Allgemeines

Bekanntlich (z.B. [11], [13]) läßt sich jede reelle rationale Übertragungsfunktion $H(p)$, die für $\text{Re}[p]>0$ die Bedingung $|H(p)|<1$ erfüllt, als Spannungsverhältnis U_2/U_1 durch ein symmetrisches Kreuzglied (Bild 2.1) mit zueinander dualen, durch RLCü-Zweipole realisierbaren Impedanzen

$$W_1(p) = R \frac{1 - H(p)}{1 + H(p)}, \quad (2.1a)$$

$$W_2(p) = \frac{R^2}{W_1(p)} = R \frac{1 + H(p)}{1 - H(p)} \quad (2.1b)$$

verwirklichen.

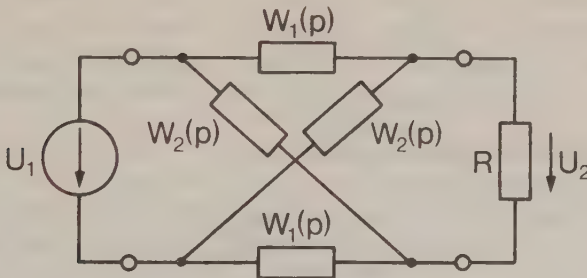


Bild 2.1: Kreuzglied mit zueinander dualen Impedanzen

Da symmetrische Kreuzglieder mit dualen Impedanzen $W_1(p)$ und $W_2(p)=R^2/W_1(p)$ bei Abschluß mit dem ohmschen Widerstand R eine reelle frequenzunabhängige Eingangsimpedanz besitzen, die ebenfalls gleich R ist, lassen sie sich mit anderen Zweitoren, die bezüglich des Abschlußwiderstands und der Eingangsimpedanz die gleichen Eigenschaften aufweisen, in Kette schalten, ohne deren Übertragungsverhalten zu beeinflussen. Die Übertragungsfunktion einer Kettenanordnung solcher Zweitoren ist daher gleich dem Produkt der Übertragungsfunktionen

der einzelnen Zweitore.

Die praktischen Nachteile bei der Realisierung von Übertragungsfunktionen durch Kreuzglieder sind vor allem durch den erforderlichen hohen Aufwand an Energiespeichern, die verhältnismäßig große Empfindlichkeit des äußeren Netzwerkverhaltens gegenüber Bauelementetoleranzen und durch das Fehlen einer durchgehenden Kurzschlußverbindung gegeben.

Nach [13] kann aber ein Kreuzglied gemäß Bild 2.1 durch ein äquivalentes überbrücktes T-Netzwerk (Bild 2.2) mit ausführbaren passiven Impedanzen $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ und $Z_3(p)$ ersetzt werden, wenn eine Zweipolfunktion $Z_3(p)$ derart existiert, daß sowohl $W_2(p) \cdot Z_3(p)$ als auch $W_2(p) \cdot R^2 / Z_3(p)$ eine Zweipolfunktion ist. Es gilt dann

$$Z_1(p) = R \frac{W_2(p)^2}{\frac{W_2(p)}{R} - \frac{1}{Z_3(p)}} \quad (2.2a)$$

$$Z_2(p) = R \frac{\frac{W_2(p)}{R} - \frac{1}{Z_3(p)}}{2} \quad (2.2b)$$

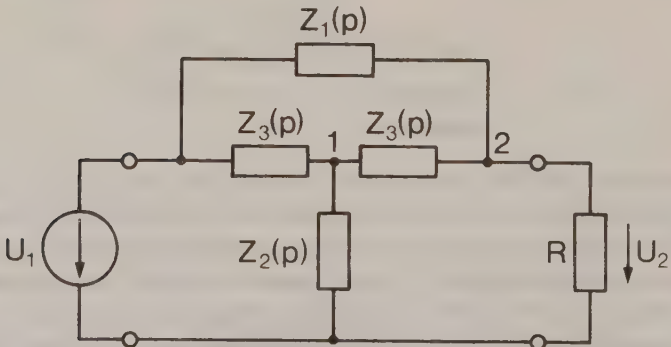


Bild 2.2: Äquivalentes überbrücktes T-Netzwerk zu dem im Bild 2.1 dargestellten Kreuzglied mit dualen Impedanzen

2.2. Die Realisierungsbedingungen für überbrückte T-Glieder

Falls $\operatorname{Re}[W_2(j\omega)] \geq R$ für $0 \leq \omega \leq \infty$ gilt, existiert zum symmetrischen Kreuzglied mit dualen Impedanzen $W_1(p)$ und $W_2(p)$ ein äquivalentes überbrücktes T-Netzwerk mit

$$Z_3(p) \equiv R$$

und zueinander dualen, durch RLCü-Zweipole realisierbaren Impedanzen

$$Z_1(p) = R \frac{2}{W_2(p)/R - 1}, \quad Z_2(p) = R \frac{W_2(p)/R - 1}{2}.$$

Überbrückte T-Netzwerke mit $Z_3(p) \equiv R$ haben vor allem bei der Entzerrung und Nachbildung des Dämpfungsverlaufs von Übertragungstrecken besondere Bedeutung erlangt. Auch die vorliegende Arbeit befaßt sich hauptsächlich mit diesem Sonderfall, und es soll daher im folgenden, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil vermerkt ist, unter dem Begriff "überbrücktes T-Glied" dieser Sonderfall verstanden werden.

Für $Z_3(p) \equiv R$ und $Z_2(p) = R^2/Z_1(p)$ stellt das Netzwerk im Bild 2.2 bezüglich der Knotenpunkte 1 und 2 eine abgegliche Brücke dar, so daß sich das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung unmittelbar ablesen läßt. Man erhält

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = \frac{R}{R + Z_1(p)} = \frac{1}{1 + Z_1(p)/R}.$$

Da die Eingangsimpedanz des mit R abgeschlossenen überbrückten T-Glieds ebenfalls gleich R ist, gilt auch für eine Kettenanordnung aus überbrückten T-Gliedern, daß die Übertragungsfunktion des mit R abgeschlossenen Gesamtzweitores gleich dem Produkt der Übertragungsfunktionen der Einzelzweitore ist.

Aus der Verknüpfung von $H(p)$ und $Z_1(p)/R$ und aus der Dualitätsbeziehung $Z_1(p)Z_2(p) = R^2$ folgt unmittelbar:

Eine Funktion $H(p)$ ist genau dann als Spannungsverhältnis U_2/U_1

durch ein überbrücktes T-Glied realisierbar, wenn die normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{Z_1(p)}{R} = \frac{R}{Z_2(p)} = \frac{1}{H(p)} - 1 \quad (2.3)$$

eine Zweipolfunktion ist. Daraus folgt der

Satz 1a:

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktion $H(p)$ als Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung eines überbrückten T-Glieds realisiert werden kann, sind die folgenden Bedingungen:

1. $H(p)$ ist Zweipolfunktion.
2. Es gilt $\operatorname{Re}[1/H(j\omega)] \geq 1$ für $0 \leq \omega \leq \infty$.

Soll $H(p)$ lediglich bis auf einen konstanten positiven Faktor K durch ein überbrücktes T-Glied realisierbar sein, so kann die zweite Forderung von Satz 1a abgeschwächt werden. Es gilt in diesem Fall der

Satz 1b:

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktion $H(p)$ bis auf einen konstanten positiven Faktor als Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung eines überbrückten T-Glieds realisiert werden kann, sind die folgenden Bedingungen:

1. $H(p)$ ist Zweipolfunktion.
2. Es gilt $\operatorname{Re}[1/H(j\omega)] > 0$ für $0 \leq \omega \leq \infty$.

Die Realisierungsbedingungen von Satz 1a können nämlich durch die Funktion $\bar{H}(p) = K \cdot H(p)$ für hinreichend kleine positive K -Werte genau dann erfüllt werden, wenn $H(p)$ den Bedingungen von Satz 1b genügt.

Aus der zweiten Bedingung von Satz 1a bzw. Satz 1b folgt im

übrigen, daß $1/H(p)$ auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene einschließlich des Punktes $p=\infty$ keine Nullstellen haben darf. Die Funktion $H(p)$ kann also dort zwar einfache Nullstellen, jedoch keine Pole besitzen.

2.3. Notwendige Bedingungen für die Realisierbarkeit von Übertragungsfunktionen durch Kettenanordnungen überbrückter T-Glieder

Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, daß eine Funktion $H(p)$ genau dann als Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung einer Kettenanordnung überbrückter T-Glieder realisiert werden kann, wenn es möglich ist, $H(p)$ als Produkt von Teilübertragungsfunktionen darzustellen, die den Bedingungen von Satz 1a genügen. Kommt es bei der Realisierung von $H(p)$ auf einen konstanten positiven Faktor nicht an, so müssen die Teilübertragungsfunktionen lediglich die Bedingungen von Satz 1b erfüllen.

In beiden Fällen müssen die Pole von $H(p)$ in der offenen linken Hälfte der komplexen Frequenzebene liegen. Dagegen dürfen die Nullstellen von $H(p)$ in der abgeschlossenen linken Halbebene $\operatorname{Re}[p] \geq 0$, also auch auf der imaginären Achse $\operatorname{Re}[p]=0$ einschließlich des Punktes $p=\infty$ auftreten.

Für die Realisierung durch eine Kettenanordnung von überbrückten T-Gliedern kommen demnach nur reelle rationale Mindestphasen-Übertragungsfunktionen in Frage, die auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene und im Punkt Unendlich polfrei sind.

3. DIE VERWIRKLICHUNG VON MINDESTPHASEN-ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN DURCH KETTENANORDNUNGEN ÜBERBRÜCKTER T-GLIEDER MIT KANO- NISCH UND ÜBERTRAGERFREI REALISIERBAREN IMPEDANZEN VON HÖCHSTENS ZWEITEM GRAD

3.1. Vorbemerkungen

Eine Übertragungsfunktion $H(p)$ von höherem als dem zweiten Grad, die den im Abschnitt 2.3 genannten Bedingungen genügt und durch eine Kettenanordnung überbrückter T-Glieder mit kanonisch und Übertragerfrei realisierbaren Impedanzen von höchstens zweitem Grad verwirklicht werden soll, ist zunächst in ein Produkt von Teilfunktionen aufzuspalten. Dabei muß darauf geachtet werden, daß

1. die Faktoren dieses Produkts reelle Funktionen in p sind, d.h., daß konjugiert komplexe Nullstellen- bzw. Polpaare im gleichen Faktor zusammengefaßt sind,
2. in keinem der Faktoren ein Gradüberschuß des Zählers gegenüber dem Nenner auftritt.

Faktoren von $H(p)$ mit dem Grad Eins erfüllen in jedem Fall die im Satz 1b genannten Bedingungen. Die zugehörigen Netzwerkrealisierungen sind stets Übertragerfrei. Bei Faktoren zweiten Grades gilt dies nicht mehr uneingeschränkt. Sie lassen sich aber, sofern sie weder direkt noch bis auf einen konstanten positiven Faktor durch ein Übertragerfreies überbrücktes T-Glied mit maximal vier Energiespeichern verwirklicht werden können, nach Erweiterung mit einem geeignet zu wählenden Hilfspolynom von höchstens zweitem Grad in ein Produkt zweier Teilfunktionen zerlegen, für die eine derartige Realisierung möglich ist.

Sofern die Funktion $H(p)$ auf verschiedene Weise zerlegt werden kann, was häufig der Fall ist, ergeben sich mehrere Realisierungsmöglichkeiten, die sich mindestens bezüglich der Werte

ihrer Netzwerkelemente unterscheiden. Oft bestehen aber auch Unterschiede in der Netzwerkstruktur, in der Anzahl der erforderlichen Energiespeicher oder im Wert des konstanten Faktors K , um den die tatsächlich realisierte Übertragungsfunktion von der gegebenen Funktion $H(p)$ abweicht. Man wird daher normalerweise zunächst sämtliche Zerlegungsmöglichkeiten untersuchen und anschließend die für den speziellen Anwendungsfall günstigste Lösung auswählen. Als Bewertungskriterien kommen vor allem die Zahl der benötigten Energiespeicher und die Größe der Konstante K in Betracht. Jedoch kann beispielsweise auch das Empfindlichkeitsverhalten bezüglich der Bauelementetoleranzen für die Beurteilung der verschiedenen Realisierungen herangezogen werden.

In den folgenden Abschnitten wird im einzelnen untersucht, welche Bedingungen rationale, auf der imaginären Achse $\text{Re}[p]=0$ einschließlich $p=\infty$ polfreie Mindestphasen-Übertragungsfunktionen ersten und zweiten Grades erfüllen müssen, damit sie bis auf einen konstanten positiven Faktor k durch Übertragerfreie überbrückte T-Glieder mit möglichst geringem Aufwand an Energiespeichern realisiert werden können. Diese Funktionen seien so normiert, daß jeweils die Koeffizienten bei der höchsten Potenz in den Zähler- und Nennerpolynomen den Wert Eins besitzen.

Folgende Funktionstypen sind möglich:

$$H_A(p) = \frac{1}{p + b} \quad (b > 0) ,$$

$$H_B(p) = \frac{p + a}{p + b} \quad (a \geq 0; b > 0; a \neq b) ,$$

$$H_C(p) = \frac{1}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0) ,$$

$$H_D(p) = \frac{p + a}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (a \geq 0; b_0, b_1 > 0) ,$$

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (a_0, a_1 \geq 0; b_0, b_1 > 0) .$$

Bei den Funktionstypen $H_D(p)$ und $H_E(p)$ werden reelle Pole nicht unbedingt ausgeschlossen. Entsprechendes gilt für die Nullstellen von $H_E(p)$. In gewissen Fällen ist es nämlich im Hinblick auf die Größe des maximal erreichbaren konstanten Faktors günstiger, diese Übertragungsfunktionen durch ein einziges überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern statt durch eine Kettenanordnung aus zwei überbrückten T-Gliedern mit jeweils zwei Energiespeichern zu realisieren. Dies wird noch im einzelnen untersucht.

3.2. Übertragungsfunktionen ersten Grades

3.2.1. Funktionen mit einer Nullstelle bei $p=\infty$

Übertragungsfunktionen der Form

$$H_A(p) = \frac{1}{p + b} \quad (b > 0)$$

können durch ein überbrücktes T-Glied mit zwei Energiespeichern Übertragerfrei bis auf einen konstanten Faktor k verwirklicht werden, der im Bereich

$$0 < k \leq b$$

liegt.

Gemäß Gl.(2.3) ist nämlich die zu $kH_A(p)$ gehörige normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k} (p + b) - 1 = \frac{1}{k} p + \frac{b}{k} - 1$$

genau dann eine Zweipolfunktion, wenn $b/k - 1 \geq 0$ ist. Die Impe-

danzen $Z_1(p) = Rz(p)$ und $Z_2(p) = R/z(p)$ sind wie $z(p)$ als Zweipolfunktionen ersten Grades kanonisch und Übertragerfrei realisierbar.

3.2.2. Funktionen mit von Null verschiedenem Funktionswert bei $p=\infty$

Bei Übertragungsfunktionen der Form

$$H_B(p) = \frac{p + a}{p + b} \quad (a \geq 0; b > 0; a \neq b)$$

ist eine Übertragerfreie Realisierung durch ein überbrücktes T-Glied mit zwei Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor k aus dem Intervall ¹⁾

$$0 < k \leq \text{Min} \left[1, \frac{b}{a} \right]$$

möglich.

Dieser zulässige Bereich für k folgt aus der Tatsache, daß die zu $k H_B(p)$ gehörige normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k} \frac{p + b}{p + a} - 1 = \frac{(1-k)p + b - ka}{k(p + a)}$$

genau dann eine Zweipolfunktion ist, wenn $1-k \geq 0$ und $b-ka \geq 0$ gilt.

3.3. Übertragungsfunktionen zweiten Grades

3.3.1. Einige Sätze

Im Gegensatz zu Zweipolfunktionen ersten Grades, die stets kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden können, ist bei Funktionen zweiten Grades

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit nicht-negativen Koeffizienten, die der Positivitätsforderung

$$(\sqrt{\alpha_2 \beta_0} - \sqrt{\alpha_0 \beta_2})^2 \leq \alpha_1 \beta_1 \quad (3.1)$$

genügen, nicht zugleich auch die Übertragerfreie kanonische Realisierbarkeit gesichert. Dies gilt nur in Sonderfällen, z.B. für $\alpha_2 \beta_0 = \alpha_0 \beta_2$ oder wenn mindestens einer der Koeffizienten von $f(p)$ verschwindet. Im allgemeinen ist eine kanonische und Übertragerfreie Realisierung von $f(p)$ nur unter einschränkenderen Bedingungen möglich. Die Ergebnisse der hierüber in [14] und [15] angestellten Untersuchungen sind in den folgenden Sätzen zusammengefaßt.

Satz 2:

Eine Funktion

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit reellen positiven Koeffizienten, für die

$$\alpha_2 \beta_0 > \alpha_0 \beta_2$$

gilt, kann genau dann mit dem Realisierungsverfahren von O. BRUNE [8] als Impedanz kanonisch und Übertragerfrei verwirklicht werden, wenn mindestens eine der beiden Funktionen

-
- 1) Für $a=0$ ist der Quotient b/a nicht definiert. Damit die Fälle $a>0$ und $a=0$ nicht jeweils gesondert betrachtet werden müssen, wird im folgenden vereinbart, daß der Quotient b/a im Grenzfall $a=0$ formal durch eine sehr große positive Konstante ersetzt werden darf.

$$f_1(p) = f(p) - \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad f_2(p) = \frac{1}{f(p)} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

eine Zweipolfunktion ist.

Zum Nachweis der Aussage von Satz 2 werden die Funktionen $f(p)$ und $1/f(p)$ nach BRUNE entwickelt. Zunächst wird für jede der beiden Funktionen das Minimum ihres Realteils auf der imaginären Achse $p=j\omega$ im Intervall $0 \leq \omega \leq \infty$ bestimmt. Nach dem Abspalten dieser Realteilminima $r_1 = \text{Min}\{\text{Re}[f(j\omega)]\}$ bzw. $r_2 = \text{Min}\{\text{Re}[1/f(j\omega)]\}$ verbleiben die Restfunktionen

$$g_1(p) = f(p) - r_1 = \frac{(\alpha_2 - r_1 \beta_2)p^2 + (\alpha_1 - r_1 \beta_1)p + (\alpha_0 - r_1 \beta_0)}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0},$$

$$g_2(p) = \frac{1}{f(p)} - r_2 = \frac{(\beta_2 - r_2 \alpha_2)p^2 + (\beta_1 - r_2 \alpha_1)p + (\beta_0 - r_2 \alpha_0)}{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}.$$

Die Funktion $f(p)$ kann genau dann als Impedanz Übertragerfrei nach BRUNE realisiert werden, wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es ist $r_1 \geq 0$. Die Funktion $g_1(p)$ erfüllt die Positivitätsbedingungen und verschwindet dort, wo das Minimum von $\text{Re}[f(j\omega)]$ auftritt.
2. Es ist $r_2 \geq 0$. Die Funktion $g_2(p)$ erfüllt die Positivitätsbedingungen und verschwindet dort, wo das Minimum von $\text{Re}[1/f(j\omega)]$ auftritt.

Die erste Bedingung ist wegen der im Satz 2 gemachten Voraussetzung $\alpha_2 \beta_0 > \alpha_0 \beta_2$ nicht zu erfüllen, wenn das Minimum von $\text{Re}[f(j\omega)]$ im Intervall $0 < \omega < \infty$ auftritt. Die Funktion $g_1(p)$ könnte nämlich nur dann eine Nullstelle auf der imaginären Achse $p=j\omega$ im Intervall $0 < \omega < \infty$ haben, wenn $\alpha_1 - r_1 \beta_1 = 0$ gelten würde. Angesichts der Positivitätsforderung für $g_1(p)$

müßte daher die im Satz 2 ausgeschlossene Beziehung $\alpha_2\beta_0 = \alpha_0\beta_2$ gelten. Auch der Fall, daß $\operatorname{Re}[f(j\omega)]$ sein Minimum bei $\omega = \infty$ annimmt, ist wegen der Voraussetzung $\alpha_2\beta_0 > \alpha_0\beta_2$ nicht möglich. Tritt dagegen das Minimum von $\operatorname{Re}[f(j\omega)]$ bei $\omega = 0$ auf, dann hat nach Abzug dieses Realteilminimums $r_1 = \alpha_0/\beta_0 > 0$ die Restfunktion $g_1(p) \equiv f_1(p) = f(p) - \alpha_0/\beta_0$ eine Nullstelle bei $p = 0$ und kann, sofern sie eine Zweipolfunktion ist, durch einen Übertragerfreien RLC-Zweipol verwirklicht werden.

Ganz entsprechend läßt sich zeigen, daß unter der Voraussetzung $\alpha_2\beta_0 > \alpha_0\beta_2$ das Minimum von $\operatorname{Re}[1/f(j\omega)]$ nur bei $\omega = \infty$ auftreten kann und daß sich nach dem Abspalten dieses Minimums $r_2 = \beta_2/\alpha_2 > 0$ die Restfunktion $g_2(p) \equiv f_2(p) = 1/f(p) - \beta_2/\alpha_2$ durch einen Übertragerfreien RLC-Zweipol verwirklichen läßt, sofern sie eine Zweipolfunktion ist.

Die Funktion $f(p)$ kann daher unter der Voraussetzung $\alpha_2\beta_0 > \alpha_0\beta_2$ als Impedanz genau dann Übertragerfrei nach BRUNE verwirklicht werden, wenn wenigstens eine der beiden Funktionen $f_1(p)$, $f_2(p)$ eine Zweipolfunktion ist, wenn also die Koeffizienten von $f(p)$ wenigstens einer der beiden Bedingungen

$$S_1 \equiv \alpha_2(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) - \alpha_1(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) \leq 0, \quad$$

$$S_2 \equiv \beta_0(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) - \beta_1(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) \leq 0$$

genügen.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß für $\alpha_2\beta_0 = \alpha_0\beta_2$ und in allen Fällen, in denen einzelne Koeffizienten von $f(p)$ verschwinden, die beiden Größen S_1 und S_2 nicht gleichzeitig positiv sein können, wenn $f(p)$ eine Zweipolfunktion ist. Verletzt $f(p)$ dagegen die Positivitätsbedingung (3.1), dann kann offenbar weder $S_1 \leq 0$ noch $S_2 \leq 0$ werden. Die ursprünglich für $\alpha_v > 0$, $\beta_v > 0$ ($v = 0, 1, 2$) und $\alpha_2\beta_0 > \alpha_0\beta_2$ abgeleiteten Realisierungsbedingungen $S_1 \leq 0$, $S_2 \leq 0$ sind demzufolge auch unter den weniger einschränkenden Voraussetzungen $\alpha_v \geq 0$, $\beta_v \geq 0$ ($v = 0, 1, 2$) und $\alpha_2\beta_0 \geq \alpha_0\beta_2$ gültig.

Durch einfaches Vertauschen der Koeffizienten α_v mit β_v ($v=0,1,2$) gewinnt man aus den Ungleichungen $S_1 \leq 0$, $S_2 \leq 0$ die Bedingungen, unter denen die Funktion $f(p)$ für $\alpha_v \geq 0$, $\beta_v \geq 0$ ($v=0,1,2$) und $\alpha_2\beta_0 \leq \alpha_0\beta_2$ als Impedanz nach BRUNE übertragerfrei verwirklicht werden kann.

Von R.M. FOSTER und E.L. LADENHEIM [15] stammt der

Satz 3:

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit reellen positiven Koeffizienten, für die

$$\alpha_2\beta_0 > \alpha_0\beta_2$$

gilt, durch ein Brückennetzwerk nach Bild 3.1 als Impedanz kanonisch verwirklicht werden kann, sind folgende Bedingungen:

$$1. S_0 \equiv (\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2)^2 - (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) > 0 ,$$

2. Die Ausdrücke

$$S_1 \equiv \alpha_2(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) - \alpha_1(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) ,$$

$$S_2 \equiv \beta_0(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2) - \beta_1(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) ,$$

$$S_3 \equiv (\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2)(\alpha_2\beta_0 - 3\alpha_0\beta_2) - (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)$$

dürfen nicht alle gleiches Vorzeichen besitzen, S_1 und S_2 müssen von Null verschieden sein,

$$3. S_4 \equiv (\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2)(\alpha_2\beta_0 - 9\alpha_0\beta_2) + 4\alpha_1\alpha_0\beta_2\beta_1 - \\ - (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) \geq 0 .$$

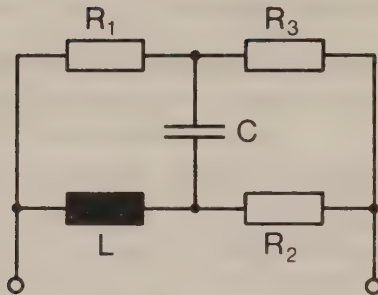


Bild 3.1: Brückennetzwerk nach R.M. FOSTER
und E.L. LADENHEIM

Die Fälle $S_1=0$ und $S_2=0$ wurden im Satz 3 ausgeschlossen, da die zugehörigen Brückennetzwerke durch den Wegfall ohmscher Elemente entarten und mit den Realisierungen von $f(p)$ nach BRUNE identisch sind. Dasselbe gilt für $\alpha_2\beta_0=\alpha_0\beta_2$ und für den Fall, daß $f(p)$ eine Zweipolfunktion ist, deren Koeffizienten der Bedingung $S_0>0$ genügen, jedoch nicht alle positiv sind.

Die Herleitung der im Satz 3 genannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit der Impedanzfunktion $f(p)$ nach FOSTER und LADENHEIM erfolgt im Anhang I dieser Arbeit. Dort sind auch die Beziehungen angegeben, mit denen aus den Koeffizienten der Funktion $f(p)$ die Elemente des Netzwerks von Bild 3.1 bestimmt werden können.

Die unter den Voraussetzungen $\alpha_v>0$, $\beta_v>0$ ($v=0,1,2$) und $\alpha_2\beta_0<\alpha_0\beta_2$ gültigen Bedingungen für die Realisierbarkeit von $f(p)$ nach FOSTER und LADENHEIM ergeben sich aus den im Satz 3 genannten Realisierungsbedingungen, wenn man in den Ausdrücken S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 die Koeffizienten α_v mit β_v ($v=0,1,2$) vertauscht. Die Realisierung der Impedanzfunktion $f(p)$ erfolgt in diesem Fall durch ein Netzwerk, dessen Struktur dual zu derjenigen von Bild 3.1 ist.

Das Ergebnis einer Untersuchung von M. REICHERT [14] ist der

Satz 4:

Eine Zweipolfunktion

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit

$$\alpha_2 \beta_0 > \alpha_0 \beta_2 ,$$

deren Koeffizienten positiv sind und weder den aus Satz 2 abgeleiteten noch den im Satz 3 genannten Bedingungen genügen, kann nicht kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden.

3.3.2 Funktionen mit einer doppelten Nullstelle bei $p=\infty$

Die Funktion

$$H_C(p) = \frac{1}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0)$$

kann Übertragerfrei durch die Kettenanordnung aus einem Überbrückten T-Glied mit vier Energiespeichern und einem Überbrückten T-Glied mit zwei Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor k mit

$$0 < k \leq b_1^2/4$$

realisiert werden, wie im folgenden gezeigt wird.

Da $H_C(p)$ wegen der doppelten Nullstelle bei $p=\infty$ keine Zweipolfunktion sein kann, ist die erste Realisierungsbedingung von Satz 1b verletzt. Eine Aufspaltung von $H_C(p)$ in zwei reelle Funktionen ersten Grades ist wegen der Voraussetzung $b_1^2 < 4b_0$ nicht möglich. Die Funktion $H_C(p)$ wird daher nach Er-

weiterung mit dem Faktor $p+x$ als Produkt

$$H_C(p) = H_{C1}(p) H_{C2}(p)$$

mit

$$H_{C1}(p) = \frac{p+x}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad H_{C2}(p) = \frac{1}{p+x} \quad (x>0)$$

geschrieben.

Der Funktion $k_1 H_{C1}(p)$ ist gemäß Gl.(2.3) die normierte Impedanz

$$z_1(p) = \frac{1}{k_1 H_{C1}(p)} - 1 = \frac{1}{k_1} \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{p+x} - 1$$

zugeordnet. Wegen der Voraussetzung $b_1^2 < 4b_0$ gilt für beliebige Werte von x die Relation $b_1 - x < b_0/x$. Daher kann das Minimum von $\text{Re}[z_1(j\omega)]$ nur bei $\omega=\infty$ auftreten, so daß sich $z_1(p)$ nach dem Abspalten des Pols bei $p=\infty$ und des Realteilminimums in der Form

$$z_1(p) = \frac{p}{k_1} + \frac{b_1 - x}{k_1} - 1 + \frac{x}{k_1} \frac{b_0/x + x - b_1}{p+x}$$

schreiben läßt. Aus dieser Darstellung kann unmittelbar die Bedingung

$$\frac{b_1 - x}{k_1} - 1 \geq 0$$

für die Realisierbarkeit von $z_1(p)$ abgelesen werden. Die Konstante k_1 darf sich somit im Intervall

$$0 < k_1 \leq b_1 - x$$

bewegen. Ein derartiges Intervall existiert, wenn $x < b_1$ gewählt wird.

Die Behandlung der Übertragungsfunktion $H_{C2}(p)$ erfolgt nach Abschnitt 3.2.1. Sie ist für beliebige positive Werte von x bis auf eine Konstante k_2 realisierbar, die im Intervall

$$0 < k_2 \leq x$$

liegt.

Die Funktion $H_C(p)$ kann damit bis auf eine Konstante $k=k_1k_2$ durch eine Kettenschaltung aus zwei überbrückten T-Gliedern verwirklicht werden. Die obere Grenze für k hängt von x ab und nimmt mit $b_1^2/4$ bei $x=b_1/2$ ihren größtmöglichen Wert an.

3.3.3. Funktionen mit einer einfachen Nullstelle bei $p=\infty$

Bei der Behandlung des Funktionstyps

$$H_D(p) = \frac{p + a}{p^2 + b_1p + b_0} \quad (a \geq 0; b_0, b_1 > 0)$$

wird mit der Forderung $b_0 \neq a(b_1 - a)$ der Fall ausgeschlossen, daß $H_D(p)$ eine gemeinsame Nullstelle im Zähler und Nenner besitzt. Im einzelnen sind folgende Fallunterscheidungen notwendig:

- a) Es gilt $b_0 - a(b_1 - a) < 0$. Dann läßt sich $H_D(p)$ durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern Übertragerfrei bis auf einen konstanten Faktor k realisieren, der im Intervall

$$0 < k \leq b_0/a$$

liegen darf.

- b) Es gilt $b_0 - a(b_1 - a) > 0$ und $0 \leq a < b_1$. Die Realisierung von $H_D(p)$ ist bis auf einen konstanten Faktor k durch ein Übertragerfreies überbrücktes T-Glied mit vier Energie-

speichern möglich. Der zulässige Wertebereich für k lautet

$$0 < k \leq b_1 - a.$$

c) Es gilt $a \geq b_1$ und $b_1^2 \geq 4b_0$. In diesem Fall verletzt $H_D(p)$ mindestens eine der im Satz 1b genannten Bedingungen, jedoch ist eine Zerlegung von $H_D(p)$ in ein Produkt zweier Teilfunktionen ersten Grades möglich, die nach Abschnitt 3.2.1 bzw. 3.2.2 realisiert werden können.

d) Es gilt $a \geq b_1$ und $b_1^2 < 4b_0$. Hier ist eine Realisierung von $H_D(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k in Form zweier in Kette geschalteter, Übertragerfreier Überbrückter T-Glieder möglich. Dabei ist ein Mindestaufwand von sechs Energiespeichern erforderlich. Unter den obigen Voraussetzungen kann generell für

$$0 < k \leq \max \left[\frac{b_1^2}{4a}, \frac{b_0 b_1}{a^2 + b_0} \right]$$

eine Realisierung angegeben werden. Unter gewissen Umständen sind auch größere k -Werte zulässig, jedoch muß dies im Einzelfall geprüft werden.

Ob durch zusätzlichen Mehraufwand von zwei Energiespeichern eine Vergrößerung des zulässigen Wertebereichs für k erreicht werden kann, muß ebenfalls von Fall zu Fall untersucht werden.

e) Es gilt $0 \leq a < b_1$ und $b_1^2 \geq 4b_0$. Hier ist sowohl eine Realisierung durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern als auch eine Realisierung durch eine Kettenanordnung von zwei überbrückten T-Gliedern mit je zwei Energiespeichern möglich. Die erste Realisierungsmöglichkeit ist für

$$a < \frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}$$

im Hinblick auf den zulässigen Wertebereich für die Konstante k günstiger als die zweite Art der Realisierung. Für

$$\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0} \leq a \leq \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}$$

sind beide Realisierungen gleichwertig. Dagegen ist für

$$a > \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}$$

die Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder bezüglich des maximal erreichbaren k -Werts günstiger. Insbesondere ist hier auch dann eine Realisierung noch möglich, wenn $a \geq b_1$ gilt.

Im folgenden werden die Aussagen für die Fälle a bis e näher erläutert und begründet.

- a) Ist $b_0 - a(b_1 - a) < 0$, so läßt sich aus der Darstellung für die zu $kH_D(p)$ gehörige normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{p}{k} + \frac{1}{k} \frac{b_0}{a} - 1 + \frac{1}{ka} \frac{(b_1 - a)a - b_0}{p + a} p$$

die Realisierungsbedingung $0 < k \leq b_0/a$ unmittelbar ablesen.

- b) Für $b_0 - a(b_1 - a) > 0$ können die Realisierungsbedingungen unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Abschnitt 3.3.2 sofort angegeben werden. Der einzige Unterschied zwischen der vorliegenden Funktion $H_D(p)$ und der Funktion $H_{C1}(p)$ von Abschnitt 3.3.2 besteht darin, daß das Absolutglied des Zählers von $H_D(p)$ auch den Wert Null annehmen darf. Beim Zählerpolynom von $H_{C1}(p)$, das aufgrund einer Erweiterung zustande gekommen war, mußte dies ausgeschlossen werden, da sonst die zugehörige Funktion $H_{C2}(p)$ wegen eines Pols bei $p=0$ nicht realisierbar gewesen wäre.

c) Dieser Fall bedarf keiner weiteren Erörterung.

d) Gilt $a \geq b_1$ und $b_1^2 < 4b_0$, so muß $H_D(p)$ zunächst mit einem Polynomfaktor erweitert werden, damit eine Zerlegung in zwei realisierbare Teilfunktionen $H_{D1}(p)$ und $H_{D2}(p)$ vorgenommen werden kann. Grundsätzlich bestehen hierfür die beiden folgenden Möglichkeiten:

$$H_D(p) = H_{D1}(p) H_{D2}(p)$$

mit

$$H_{D1}(p) = \frac{p + x}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad H_{D2}(p) = \frac{p + a}{p + x} \quad (x > 0)$$

oder

$$H_{D1}(p) = \frac{p^2 + yp + x}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad H_{D2}(p) = \frac{p + a}{p^2 + yp + x} \quad (x, y > 0).$$

Für die erste Zerlegungsmöglichkeit kann eine Realisierung von $H_D(p)$ bis auf einen konstanten positiven Faktor k durch eine Kettenanordnung von zwei Übertragerfreien Überbrückten T-Gliedern mit insgesamt sechs Energiespeichern angegeben werden. Berücksichtigt man die Ergebnisse der Abschnitte 3.3.2 und 3.2.2 und beachtet, daß $a \geq b_1$ gilt, so erhält man für k den zulässigen Wertebereich

$$0 < k \leq (b_1 - x) \frac{x}{a}.$$

Hieraus folgt für $x = b_1/2$ der maximal mögliche Wert $k = b_1^2/4a$.

Bei der zweiten Zerlegungsmöglichkeit ist vor allem der Fall interessant, bei dem zwischen x und y die Kopplung $y = a + x/a$ besteht. Dann tritt im Zähler und Nenner von $H_{D2}(p)$ der gemeinsame Faktor $p + a$ auf. Nach dem Kürzen ergibt sich die Funktion

$$H_{D2}(p) = \frac{1}{p + \frac{x}{a}} \quad (x > 0),$$

die nach Abschnitt 3.2.1 bis auf einen konstanten Faktor k_2 mit

$$0 < k_2 \leq \frac{x}{a}$$

zu verwirklichen ist.

Die Funktion $k_1 H_{D1}(p)$ kann Übertragerfrei mit vier Energiespeichern realisiert werden, wenn sich die zugehörige Impedanz

$$z_1(p) = \frac{1}{k_1 H_{D1}(p)} - 1 = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - 1 \right] p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - a - \frac{x}{a} \right] p + \left[\frac{b_0}{k_1} - x \right]}{p^2 + \left[a + \frac{x}{a} \right] p + x}$$

kanonisch und Übertragerfrei verwirklichen läßt. Damit die Zählerkoeffizienten von $z_1(p)$ endlich und nicht-negativ sind, muß

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{a + \frac{x}{a}}, \frac{b_0}{x} \right]$$

gelten, wobei der Wert $k_1=1$ wegen $a \geq b_1$ und $x > 0$ ausgeschlossen ist. Wählt man $x=b_0$, so ist für

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1}{a + \frac{b_0}{a}}$$

eine kanonische und Übertragerfreie Realisierung von $z_1(p)$ möglich. Die Übertragungsfunktion $H_D(p)$ kann damit bis auf einen Faktor $k=k_1 k_2$ mit

$$0 < k \leq \frac{b_0 b_1}{a^2 + b_0}$$

durch eine Kettenschaltung zweier Überbrückter T-Glieder mit insgesamt sechs Energiespeichern realisiert werden.

Da die Funktion

$$\frac{b_1}{a + \frac{x}{a}} \cdot \frac{x}{a},$$

die für $x \leq b_0$ die obere Grenze von k darstellt, monoton mit x anwächst, kann für $x < b_0$ sicherlich kein größerer k -Wert als $b_0 b_1 / (a^2 + b_0)$ erreicht werden.

Für $x > b_0$ läßt sich die Funktion $z_1(p)$ kanonisch und über-tragerfrei nach BRUNE verwirklichen, wenn außer der be-reits genannten Forderung

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[\frac{b_1}{a + \frac{x}{a}}, \frac{b_0}{x} \right]$$

noch mindestens eine der beiden aus Satz 2 folgenden Be-dingungen

$$\frac{1}{k_1} \left[b_0 - x - b_1 \left(b_1 - a - \frac{x}{a} \right) \right] + \left(a + \frac{x}{a} \right) \left(b_1 - a - \frac{x}{a} \right) + x - b_0 \geq 0, \quad (3.2a)$$

$$x(b_0 - x) - \left(a + \frac{x}{a} \right) \left(b_0 a + \frac{b_0}{a} x - b_1 x \right) \geq 0 \quad (3.2b)$$

erfüllt ist.

Die Ungleichung (3.2a) kann für hinreichend kleine k_1 -Werte erfüllt werden, wenn man x derart wählt, daß der mit $1/k_1$ behaftete Term auf der linken Ungleichungsseite positiv wird. Im interessierenden Bereich $x > b_0$ existiert stets ein x -Intervall, in dem diese Voraussetzung gegeben ist. Aller-dings hängt es von den jeweiligen Werten der Koeffizienten von $H_D(p)$ ab, ob die im Fall $x=b_0$ ermittelte obere Grenze des zulässigen Bereichs von $k=k_1 k_2$ für $x > b_0$ überboten wer-den kann. Dies soll hier nicht im einzelnen diskutiert werden.

Die Frage, ob die bei $x=b_0$ verletzte Bedingung (3.2b) für

$x > b_0$ erfüllt werden kann, läßt sich ebenfalls nicht generell, sondern nur im Einzelfall beantworten. Dazu hat man das Maximum der in x quadratischen linken Seite der Ungleichung (3.2b) zu bestimmen und zu prüfen, ob es im Intervall $b_0 < x < \infty$ liegt und nicht negativ ist. Eine notwendige Bedingung hierfür ist $b_0/a < b_1$.

Da die Nullstellen von $H_{D1}(p)$ reell sind, ist der Bereich, in dem sich k_1 bewegen darf, damit für $z_1(p)$ die Realisierungsbedingungen von FOSTER und LADENHEIM erfüllt werden können, prinzipiell nicht größer als bei der Übertragerfreien Realisierung von $z_1(p)$ nach BRUNE (vgl. Anhang III). Es erübrigt sich daher, die Bedingungen von Satz 3 auf die normierte Impedanz $z_1(p)$ anzuwenden.

- e) Für die Erörterung des Falles $0 \leq a < b_1$, $b_1^2 \geq 4b_0$ ist es zweckmäßig, die Nennerkoeffizienten b_0 und b_1 durch die reellen Pole von $H_D(p)$, die mit $-p_1$ und $-p_2$ bezeichnet werden sollen, zu ersetzen:

$$b_0 = p_1 p_2, \quad b_1 = p_1 + p_2.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dabei $p_1 \leq p_2$ gesetzt werden. Mit den neu eingeführten Variablen lassen sich die aus den Unterabschnitten a und b bekannten Beziehungen

$$b_0 - a(b_1 - a) < 0, \quad 0 < k \leq \frac{b_0}{a}$$

und

$$b_0 - a(b_1 - a) > 0, \quad 0 < k \leq b_1 - a$$

in der Form

$$a^2 - (p_1 + p_2)a + p_1 p_2 < 0, \quad 0 < k \leq \frac{p_1 p_2}{a}$$

bzw.

$$a^2 - (p_1 + p_2)a + p_1 p_2 > 0, \quad 0 < k \leq p_1 + p_2 - a$$

schreiben. Nimmt man p_1 und p_2 als fest gegeben und a als variabel an, so lassen sich die Verhältnisse graphisch veranschaulichen. Zu beachten ist, daß die in a quadratische Funktion $a^2 - (p_1 + p_2)a + p_1 p_2$ innerhalb der Intervalle $0 \leq a < p_1$ und $p_2 < a < \infty$ positiv, für $p_1 < a < p_2$ dagegen negativ ist. Im Bild 3.2 ist der Maximalwert $k_{\max}$ des konstanten Faktors k als Funktion von a mit p_1 und p_2 als Parametern aufgetragen. Von Interesse ist dabei lediglich das Intervall $0 \leq a < p_1 + p_2 = b_1$, in dem k positiv ist.

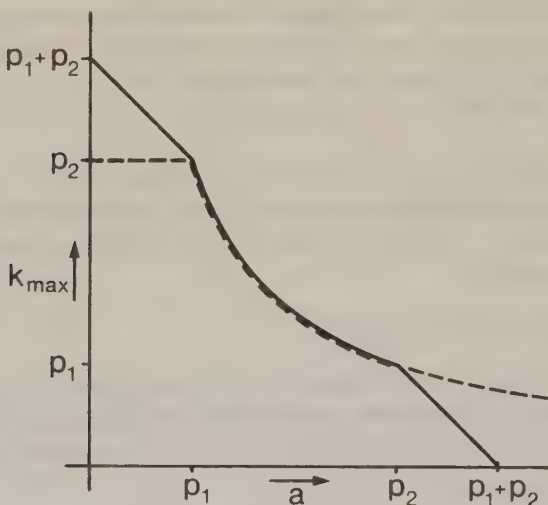


Bild 3.2: Abhängigkeit des maximal zulässigen konstanten Faktors $k_{\max}$ von der endlichen Nullstelle und den Polen der Funktion $H_D(p)$. Die durchgezogene Kurve entspricht einer Realisierung durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied, die gestrichelte einer Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder

Für die Zerlegung von $H_D(p)$ in ein Produkt zweier reeller Funktionen ersten Grades gibt es zwei Möglichkeiten. Die

entstehenden Teilfunktionen sind gemäß den Ausführungen von Abschnitt 3.2.1 bzw. 3.2.2 zu behandeln. Dabei ergibt sich je nach der gewählten Zerlegung

$$0 < k \leq p_2 \cdot \text{Min} \left[1, \frac{p_1}{a} \right] = \text{Min} \left[p_2, \frac{p_1 p_2}{a} \right]$$

oder

$$0 < k \leq p_1 \cdot \text{Min} \left[1, \frac{p_2}{a} \right] = \text{Min} \left[p_1, \frac{p_1 p_2}{a} \right] .$$

Wegen $p_1 \leq p_2$ bietet die erste Zerlegung im allgemeinen einen größeren, zumindest aber keinen kleineren Spielraum für k als die zweite. Der Maximalwert $k_{\max}$ der Konstante k ist als Funktion von a ebenfalls im Diagramm von Bild 3.2 dargestellt. Ein Vergleich der beiden Kurven zeigt die Richtigkeit der eingangs aufgestellten Behauptungen.

3.3.4. Funktionen mit von Null verschiedenem Funktionswert bei $p = \infty$

3.3.4.1. Bedingungen für die Realisierbarkeit durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern

Eine Übertragungsfunktion der Form

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (a_0, a_1 \geq 0; b_0, b_1 > 0)$$

läßt sich bis auf einen konstanten Faktor k Übertragerfrei durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern realisieren, wenn die zugehörige normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k H_E(p)} - 1 = \frac{\left[\frac{1}{k} - 1 \right] p^2 + \left[\frac{b_1}{k} - a_1 \right] p + \left[\frac{b_0}{k} - a_0 \right]}{p^2 + a_1 p + a_0} \quad (3.3)$$

kanonisch und übertragerfrei verwirklicht werden kann.

Damit die Zählerkoeffizienten von $z(p)$ endlich und nicht-negativ sind, muß

$$0 < k \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_0}{a_0} \right] \quad (3.4a)$$

gefordert werden.^{2),3)}

Aufgrund der Aussagen von Satz 2 ist die durch Gl.(3.3) definierte Impedanz $z(p)$ unter folgenden Bedingungen nach BRUNE übertragerfrei realisierbar:

Für $a_0 \geq b_0$ muß neben der an den konstanten Faktor k zu stellenden Forderung (3.4a) noch mindestens eine der Bedingungen

$$S_1^{(1)} \leq 0, \quad (3.5a)$$

$$S_2^{(1)} \leq 0 \quad (3.5b)$$

mit

$$S_1^{(1)} = \frac{1}{k} \left[\left(\frac{1}{k} - 1 \right) (a_0 - b_0) - \left(\frac{b_1}{k} - a_1 \right) (a_1 - b_1) \right], \quad (3.6a)$$

$$S_2^{(1)} = \frac{1}{k} \left[a_0 (a_0 - b_0) - a_1 (a_0 b_1 - a_1 b_0) \right] \quad (3.6b)$$

erfüllt sein.

Falls $a_0 \leq b_0$ ist, lauten die entsprechenden Bedingungen, von denen wenigstens eine erfüllt sein muß,

-
- 2) Der in der Beziehung (3.4a) ausgeschlossene, physikalisch sinnlose Grenzwert $k=0$, bei dem $z(p)$ entartet, wird bei den nachfolgenden Untersuchungen gelegentlich zugelassen, wenn diese dadurch erleichtert werden.
- 3) Für die Grenzfälle $a_0=0$ und $a_1=0$ sind die Quotienten b_0/a_0 bzw. b_1/a_1 nicht definiert. Damit diese Fälle nicht jeweils gesondert betrachtet werden müssen, wird im folgenden vereinbart, daß für $a_0=0$ oder $a_1=0$ der zugehörige Quotient b_0/a_0 bzw. b_1/a_1 formal durch eine sehr große positive Konstante ersetzt werden darf.

$$S_1^{(2)} \leq 0, \quad (3.7a)$$

$$S_2^{(2)} \leq 0 \quad (3.7b)$$

mit

$$S_1^{(2)} = \frac{1}{k} [b_0 - a_0 - a_1(b_1 - a_1)] , \quad (3.8a)$$

$$S_2^{(2)} = \frac{1}{k} \left[\left(\frac{b_0}{k} - a_0 \right) (b_0 - a_0) - \left(\frac{b_1}{k} - a_1 \right) (a_1 b_0 - a_0 b_1) \right] . \quad (3.8b)$$

Selbstverständlich muß auch hier die Konstante k der Forderung (3.4a) genügen.

Nach Satz 3 kann $z(p)$ genau dann durch ein Brückennetzwerk nach FOSTER und LADENHEIM verwirklicht werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Alle Koeffizienten von $z(p)$ müssen positiv sein, der Fall

$$\left(\frac{1}{k} - 1 \right) a_0 = \frac{b_0}{k} - a_0$$

wird ausgeschlossen. Daher ist

$$0 < k < \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_0}{a_0} \right], \quad (3.4b)$$

$$a_1 > 0, \quad (3.4c)$$

$$a_0 > 0, \quad (3.4d)$$

$$a_0 \neq b_0 \quad (3.4e)$$

zu fordern. Weiterhin muß

$$S_0 \equiv \frac{1}{k^2} \left[(a_0 - b_0)^2 - (a_1 - b_1)(a_0 b_1 - a_1 b_0) \right] > 0 \quad (3.9)$$

sein.

Falls $a_0 > b_0$ gilt, dürfen die Ausdrücke $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ und

$$S_3^{(1)} = \frac{a_0 - b_0}{k} \left[\frac{a_0 - 3b_0}{k} + 2a_0 \right] - \frac{a_1 - b_1}{k} \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{k} \quad (3.6c)$$

nicht alle das gleiche Vorzeichen besitzen, die Größen $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ dürfen nicht verschwinden, und es muß

$$S_4^{(1)} \equiv \frac{a_0 - b_0}{k} \left[\frac{a_0 - 9b_0}{k} + 8a_0 \right] + 4 \left[\frac{b_1}{k} - a_1 \right] \left[\frac{b_0}{k} - a_0 \right] a_1 - \\ - \frac{a_1 - b_1}{k} \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{k} \geq 0 \quad (3.10)$$

sein.

Falls $a_0 < b_0$ gilt, dürfen die Ausdrücke $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ und

$$S_3^{(2)} = \frac{b_0 - a_0}{k} \left[\frac{b_0 - 3a_0}{k} + 2a_0 \right] - \frac{b_1 - a_1}{k} \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{k} \quad (3.8c)$$

nicht alle gleiches Vorzeichen haben, $S_1^{(2)}$ und $S_2^{(2)}$ dürfen nicht verschwinden, und es muß

$$S_4^{(2)} \equiv \frac{b_0 - a_0}{k} \left[\frac{b_0 - 9a_0}{k} + 8a_0 \right] + 4 \left[\frac{1}{k} - 1 \right] \left[\frac{b_1}{k} - a_1 \right] a_0 a_1 - \\ - \frac{b_1 - a_1}{k} \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{k} \geq 0 \quad (3.11)$$

sein.

Selbstverständlich ist in allen Fällen, in denen $z(p)$ kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden kann, auch die Positivitätsforderung

$$(\sqrt{(1-k)a_0} - \sqrt{b_0 - ka_0})^2 \leq (b_1 - ka_1)a_1 \quad (3.12)$$

erfüllt.

Anhand der bisher angegebenen Bedingungen kann im Einzelfall verhältnismäßig leicht geprüft werden, ob eine vorgegebene Übertragungsfunktion $H_E(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k

durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern über-tragerfrei realisiert werden kann.

Um einen weitergehenden Einblick in die Zusammenhänge zu ge-winnen, ist es zweckmäßig, die bisher abgeleiteten Beziehungen graphisch zu veranschaulichen. Hierzu werden die Größen b_0 und b_1 als feste Parameter der Funktion $H_E(p)$ angenommen. Die Be-dingungen (3.4a,b) bis (3.12) lassen sich dann in einem recht-winkligen kartesischen (a_0, a_1) -Koordinatensystem als Gebiete im abgeschlossenen ersten Quadranten darstellen. Um die bei der nachfolgenden Diskussion der Realisierungsbedingungen als variabel betrachteten und die als fest angesehenen Koeffizien-ten der Funktion $H_E(p)$ äußerlich voneinander abzuheben, wird $a_0 \equiv u$ und $a_1 \equiv v$ gesetzt.

Zunächst läßt sich aufgrund der Forderung (3.4a) das gesamte in Frage kommende Gebiet $u \geq 0, v \geq 0$ in drei Teilgebiete auftei-len, die sich bezüglich des zulässigen Wertebereichs für die Konstante k unterscheiden. Diese Teilgebiete sind im Bild 3.3 bezeichnet.

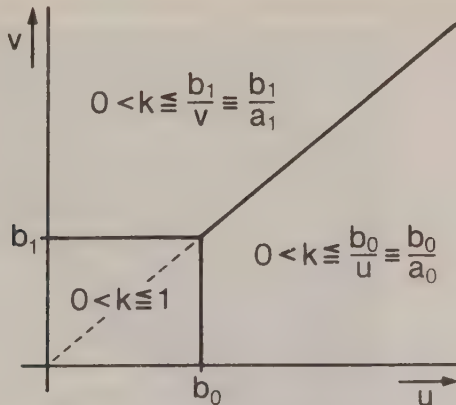


Bild 3.3: Graphische Darstellung der Forderung (3.4a)

Bei fest vorgegebenem Wert k ($0 < k \leq 1$) kann die Forderung (3.4a) nur für solche Wertepaare $(u, v) \equiv (a_0, a_1)$ erfüllt werden, die Punkten in einem abgeschlossenen Rechteckgebiet der (u, v) -Ebene

entsprechen, das durch die Koordinatenachsen und die Geraden $u=b_0/k$ bzw. $v=b_1/k$ begrenzt ist.

Die Positivitätsbedingung (3.12) geht für den Grenzfall $k \rightarrow 0$ in die Beziehung

$$(\sqrt{u} - \sqrt{b_0})^2 \leq b_1 v \quad (3.13)$$

über. Alle Punkte mit den Koordinaten (u,v) , die dieser Bedingung genügen, liegen in einem Teilgebiet des ersten Quadranten der (u,v) -Ebene, das nach unten durch ein Teilstück der Parabel

$$u^2 - 2b_1uv + b_1^2v^2 - 2b_0u - 2b_0b_1v + b_0^2 = 0$$

begrenzt ist. Diese Parabel geht durch den Punkt $(0, b_0/b_1)$, wo sie eine senkrechte Tangente besitzt. Sie hat weiterhin im Punkt $(b_0, 0)$ eine waagrechte Tangente. Oberhalb des Punktes $(0, b_0/b_1)$ ist das Gebiet, das durch die Forderung (3.13) definiert ist, wegen $u \geq 0$ zusätzlich von der v -Achse nach links begrenzt. Es ist im Bild 3.4 schraffiert dargestellt.

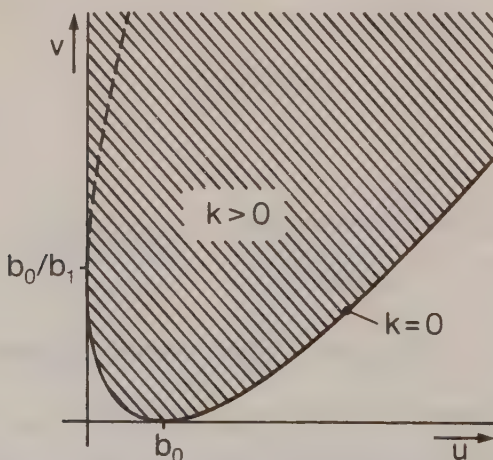


Bild 3.4: Graphische Veranschaulichung der Positivitätsbedingung (3.12)

Man kann zeigen, daß alle Wertepaare (u,v) mit $u \geq 0$, die für irgendeinen Wert k aus dem Intervall $0 < k \leq 1$ den Forderungen (3.4a) und (3.12) genügen, auch die Bedingung (3.13) erfüllen. Andernfalls müßte wenigstens ein k -Wert im Bereich $0 < k \leq 1$ existieren, für den die Ungleichung

$$(\sqrt{u} - \sqrt{b_0})^2 - (\sqrt{u(1-k)} - \sqrt{b_0 - ku})^2 > 0 \quad (3.14)$$

zumindest in einem Teil des Intervalls $0 \leq u \leq b_0/k$ erfüllt werden kann. Im Grenzfall $k=1$ ist die Ungleichung (3.14) im gesamten in Frage kommenden Intervall $0 \leq u \leq b_0$ offensichtlich verletzt. Sie kann aber auch für $0 < k < 1$ nicht erfüllt werden, da in diesem Fall ihre linke Seite an der Stelle $u = b_0/k$ negativ ist und im interessierenden Intervall $0 \leq u \leq b_0/k$ ihr Vorzeichen nicht wechselt. Demnach kann nur für solche Wertepaare $(u,v) \equiv (a_0, a_1)$, die Punkten innerhalb des schraffierten Gebiets von Bild 3.4 entsprechen, bei passender Wahl von k erreicht werden, daß die durch Gl.(3.3) definierte Funktion $z(p)$ eine Zweipolfunktion ist.

Die Bedingung (3.5a), die unter der Voraussetzung $u \geq b_0$ in Verbindung mit der Forderung (3.4a) hinreichend für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $z(p)$ nach BRUNE ist, führt auf die Ungleichung

$$(1-k)u \leq -kv^2 + b_1(1+k)v + (1-k)b_0 - b_1^2.$$

Diese beschreibt für $0 < k < 1$ ein Gebiet in der (u,v) -Ebene, das von der nach links geöffneten Parabel

$$u = \frac{-kv^2 + b_1(1+k)v + (1-k)b_0 - b_1^2}{1-k}$$

berandet wird. Aufgrund der Voraussetzung $u \geq b_0$ bildet die Gerade $u = b_0$ den linken Rand des interessierenden Gebiets. Sie schneidet die Parabel in den Punkten (b_0, b_1) und $(b_0, b_1/k)$. Die Parabel hat in diesen Punkten die Steigung $1/b_1$ bzw. $-1/b_1$.

Im Grenzfall $k=1$ können die Bedingungen (3.4a) und (3.5a) nur

für $(u,v)=(b_0,b_1)$, also nur für einen einzigen Punkt gleichzeitig erfüllt werden.

Im anderen Grenzfall $k \rightarrow 0$ geht die Parabel in die Gerade

$$v = \frac{u - b_0}{b_1} + b_1$$

über. Für alle Wertepaare (u,v) , die Punkten oberhalb dieser Gerade entsprechen, ist die Bedingung (3.5a) erfüllt, wenn

$$0 < k \leq \frac{u - b_0 - b_1(v - b_1)}{u - b_0 - v(v - b_1)}$$

gewählt wird. Wie man zeigen kann, ist die obere Grenze dieses k -Intervalls sicher kleiner als die aus der Forderung (3.4a) folgende obere Grenze für k , wenn $b_1^2 < 4b_0$ und $u > b_0$ gilt. Die Forderung (3.4a) ist in diesem Fall in der Bedingung (3.5a) enthalten. Für $b_1^2 > 4b_0$ gilt dies dagegen nicht generell. Beispielsweise ist

$$\frac{b_0}{u} < \frac{u - b_0 - b_1(v - b_1)}{u - b_0 - v(v - b_1)},$$

wenn $u > b_0$ und

$$v = 2 \frac{u - b_0}{b_1} + b_1$$

gewählt wird.

In den Bildern 3.5a und 3.5b ist für einen Fall mit $b_1^2 < 4b_0$ bzw. $b_1^2 > 4b_0$ das Gebiet dargestellt, in dem alle Punkte $(u,v) \in (a_0,a_1)$ liegen, für die bei hinreichend klein gewähltem k die Bedingung (3.5a) erfüllt werden kann. Es ist jeweils mit I bezeichnet. Zusätzlich ist die Randkurve eines Gebiets, in dem die Bedingung (3.5a) für ein k -Intervall mit vorgegebener unterer Schranke befriedigt werden kann, gestrichelt eingezeichnet.

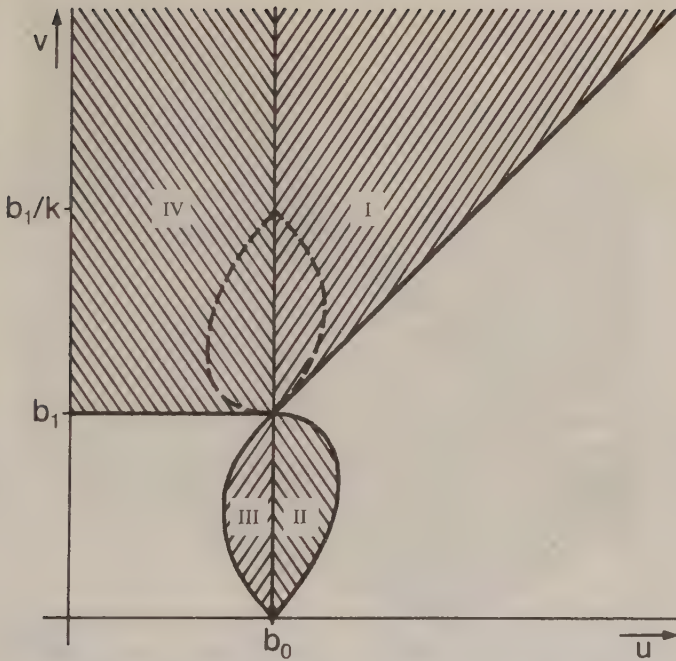


Bild 3.5a: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen (3.5a,b) und (3.7a,b) für $b_0=b_1=1$

Die Bedingung (3.5b) geht wegen $k>0$ in die Forderung

$$-u^2 + b_1uv - b_0v^2 + b_0u \geq 0$$

über. Das durch diese Ungleichung definierte Gebiet in der (u,v) -Ebene wird wegen der zusätzlichen Bedingung $u \geq b_0$ durch die Gerade $u=b_0$ nach links begrenzt. Im übrigen ist die Randkurve durch die Gleichung

$$-u^2 + b_1uv - b_0v^2 + b_0u = 0$$

gegeben. Diese Kurve geht durch den Punkt (b_0, b_1) mit der

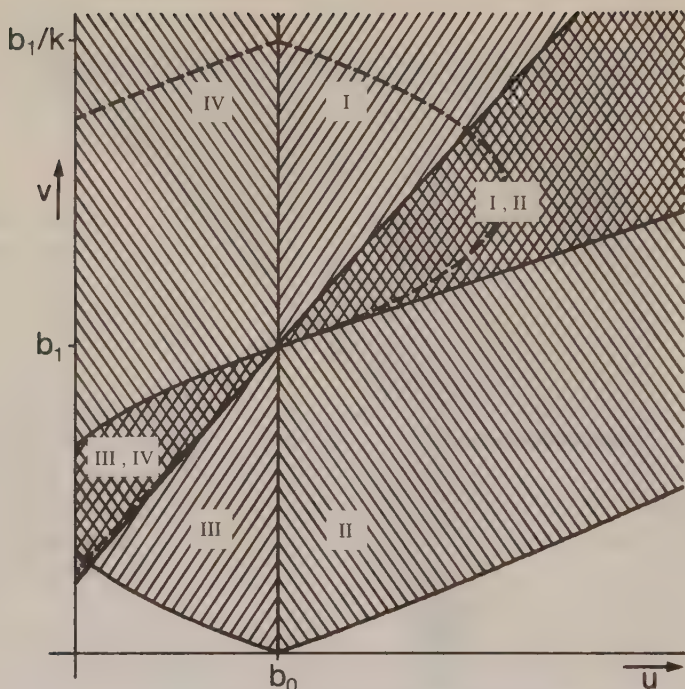


Bild 3.5b: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen (3.5a,b) und (3.7a,b) für $b_0=2$, $b_1=3$. Die beiden doppelt schraffierten Gebiete ergeben sich durch Überlappen der Gebiete I und II bzw. III und IV

Steigung $b_1/b_0 - 1/b_1$ und durch den Punkt $(b_0, 0)$ mit der Steigung $1/b_1$. Die Steigung im Punkt (b_0, b_1) ist also für $b_1^2 > 2b_0$ größer als $1/b_1$, und es existiert in diesem Fall ein Gebiet in der (u, v) -Ebene, in dem die Bedingungen (3.5a) und (3.5b) bei entsprechender Wahl von k gleichzeitig erfüllt werden können.

Da für alle Punkte innerhalb des Gebiets, in dem die Bedingung

(3.5b) erfüllt ist, die Relation $b_0/u \leq b_1/v$ gilt, reduziert sich die Zusatzforderung (3.4a) wegen der Voraussetzung $u \geq b_0$ auf

$$0 < k \leq b_0/u.$$

Für $b_1^2 > 4b_0$ ist die Randkurve eine Hyperbel, für $b_1^2 = 4b_0$ eine Parabel und für $b_1^2 < 4b_0$ eine Ellipse. Die Randkurve für jeweils einen Fall mit $b_1^2 < 4b_0$ und einen Fall mit $b_1^2 > 4b_0$ und das von ihr eingeschlossene Gebiet, das mit II bezeichnet ist, zeigt Bild 3.5a bzw. Bild 3.5b.

Die Bedingung (3.7a) führt wegen $k > 0$ auf die Ungleichung

$$-v^2 + b_1 v + u - b_0 \geq 0.$$

Das zugehörige Gebiet in der (u,v) -Ebene, das wegen der Voraussetzung $u \leq b_0$ nach rechts durch die Gerade $u=b_0$ begrenzt ist, wird im übrigen von der nach rechts geöffneten, durch die Punkte (b_0, b_1) und $(b_0, 0)$ verlaufenden Parabel

$$u = v^2 - b_1 v + b_0$$

berandet, soweit diese innerhalb des ersten Quadranten der (u,v) -Ebene liegt. Die Steigung im Punkt (b_0, b_1) ist $1/b_1$; sie hat also den gleichen Wert wie die Steigung der Randkurve des Gebiets I in diesem Punkt.

Da für alle Wertepaare (u,v) mit $0 \leq u \leq b_0$, welche die Bedingung (3.7a) erfüllen, die Beziehung $0 \leq v \leq b_1$ gilt, ergibt sich aus der Zusatzforderung (3.4a) als zulässiges Intervall für k die Beziehung

$$0 < k \leq 1.$$

Das Gebiet, das durch die oben genannte Parabel, durch die Gerade $u=b_0$ und im Fall $b_1^2 > 4b_0$ durch die Gerade $u=0$ begrenzt wird, ist in den Bildern 3.5a,b mit III bezeichnet.

Die Bedingung (3.7b) läßt sich wegen $k > 0$ in die Form

$$-ku^2 + kb_1 uv - kb_0 v^2 + [b_0(1+k) - b_1^2]u + b_0 b_1 v - b_0^2 \geq 0$$

bringen. Die Randkurve des Gebiets, das durch diese Ungleichung definiert wird, ist unter der Voraussetzung $0 < k < 1$ für $b_1^2 < 4b_0$ eine Ellipse, für $b_1^2 = 4b_0$ eine Parabel und für $b_1^2 > 4b_0$ eine Hyperbel. In jedem Fall verläuft die Randkurve mit der Steigung $b_1/b_0 - 1/b_1$ durch den Punkt (b_0, b_1) und mit der Steigung $1/b_1$ durch den Punkt $(b_0, b_1/k)$. Es existiert also für $b_1^2 > 2b_0$ ein Gebiet in der (u, v) -Ebene, in dem die Bedingungen (3.7a) und (3.7b) bei entsprechender Wahl von k gleichzeitig erfüllt werden können. Die Randkurve des durch die Ungleichung (3.7b) definierten Gebiets, das in den Bildern 3.5a, b mit IV bezeichnet ist, geht bei (b_0, b_1) ohne Knick in die Randkurve des Gebiets II über. Aufgrund der zusätzlichen Forderung $0 \leq u \leq b_0$ wird das Gebiet IV durch die Gerade $u = b_0$ nach rechts und, soweit erforderlich, durch die v -Achse nach links begrenzt.

Im Grenzfall $k=1$ wird das Gebiet IV von der v -Achse und den beiden Geraden

$$u + Av - b_0 - b_1 A = 0 ,$$

$$u + \frac{b_0}{A} v - b_0 - \frac{b_0 b_1}{A} = 0$$

mit

$$A = -\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}$$

eingeschlossen, falls $b_1^2 > 4b_0$ gilt. Ist $b_1^2 = 4b_0$, so erfüllen alle Punkte auf dem Geradenstück zwischen den beiden Punkten $(0, b_1/2)$ und (b_0, b_1) die Gln. (3.4a) und (3.7b), im Fall $b_1^2 < 4b_0$ dagegen nur der Punkt (b_0, b_1) .

Für den anderen Grenzfall $k \rightarrow 0$ erhält man aus der Beziehung (3.7b) als Randkurve die Gerade

$$v = \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{1}{b_1} \right] u + \frac{b_0}{b_1} .$$

Alle Wertepaare (u,v) mit $0 \leq u \leq b_0$, die Punkten oberhalb dieser Geraden entsprechen, erfüllen die Bedingung (3.7b), wenn

$$0 < k \leq \frac{b_0(b_0 - u) - b_1(b_0 v - b_1 u)}{u(b_0 - u) - v(b_0 v - b_1 u)}$$

gewählt wird. Wie man zeigen kann, ist die obere Grenze dieses k -Intervalls sicher kleiner als die aus der Forderung (3.4a) folgende obere Grenze für k , wenn $b_1^2 < 4b_0$ und $u < b_0$ gilt. Die Forderung (3.4a) ist in diesem Fall in der Bedingung (3.7b) enthalten. Für $b_1^2 > 4b_0$ gilt dies dagegen nicht generell. Beispielsweise ist

$$\frac{b_0(b_0 - u) - b_1(b_0 v - b_1 u)}{u(b_0 - u) - v(b_0 v - b_1 u)} > 1 ,$$

wenn

$$v = \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{2}{b_1} \right] u + 2 \frac{b_0}{b_1} \quad \text{und} \quad u < b_0$$

gewählt wird.

In den Bildern 3.5a,b ist neben der Randkurve für $k \rightarrow 0$ und das von ihr begrenzte Gebiet IV noch eine weitere Randkurve für einen positiven k -Wert gestrichelt eingetragen.

Bei der Diskussion der Realisierungsbedingungen für überbrückte T-Glieder, deren Impedanzen durch Brückenschaltungen nach FOSTER und LADENHEIM verwirklicht werden können, darf man auf die Ergebnisse zurückgreifen, die bei der Untersuchung der Realisierungsbedingungen (3.5a,b) und (3.7a,b) abgeleitet wurden. Daher sind nur die Bedingungen (3.4b,c,d,e), (3.9), (3.10) und (3.11) sowie die Ausdrücke (3.6c) und (3.8c) zu analysieren.

Aus den Forderungen (3.4b,c,d,e) folgt, daß nur solche Punkte in der (u,v) -Ebene von Interesse sind, für die

$$0 < u < \frac{b_0}{k} \quad \text{mit} \quad u \neq b_0 ,$$

$$0 < v < \frac{b_1}{k}$$

gilt, wobei $0 < k < 1$ sein muß.

Die linke Seite der Ungleichung (3.9) läßt sich nach Multiplikation mit dem positiven Faktor k^2 als Produkt

$$(u + Av - b_0 - b_1 A) \left(u + \frac{b_0}{A} v - b_0 - \frac{b_0 b_1}{A} \right) > 0$$

mit

$$A = -\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}$$

schreiben. Falls $b_1^2 < 4b_0$ gilt, ist die Forderung (3.9) für beliebige Wertepaare $(u, v) \neq (b_0, b_1)$ erfüllt (vgl. Anhang II). Durch die Bedingung (3.4e) ist der Fall $(u, v) = (b_0, b_1)$ aber ohnehin ausgeschlossen.

Die Bedingungen (3.4c, d, e) und (3.9) sind im Bild 3.6 veranschaulicht. Alle Punkte innerhalb des schraffierten Gebiets von Bild 3.6 entsprechen dabei Wertepaaren $(u, v) \equiv (a_0, a_1)$, welche diese Bedingungen erfüllen.

Zur Diskussion des durch Gl. (3.6c) definierten Ausdrucks $S_3^{(1)}$ nimmt man zweckmäßigerweise die folgende Aufspaltung vor:

$$S_3^{(1)} = \frac{1}{k^2} f_3^{(1)}(u, v) + \frac{1}{k} g_3^{(1)}(u, v)$$

mit

$$f_3^{(1)}(u, v) = (u - b_0)(u - 3b_0) - (v - b_1)(b_1 u - b_0 v) ,$$

$$g_3^{(1)}(u, v) = 2u(u - b_0) .$$

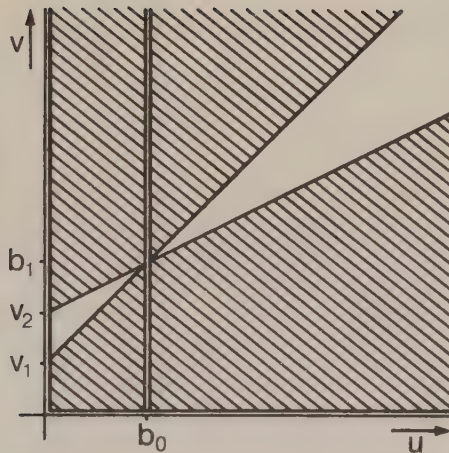


Bild 3.6: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen (3.4c,d,e) und (3.9) für den Fall $b_0=2$, $b_1=3$. Dabei ist

$$v_1 = b_1/2 + \sqrt{b_1^2/4 - b_0}, \quad v_2 = b_0/v_1$$

Die Kurve $f_3^{(1)}(u,v) = 0$ verläuft vollständig im Gebiet $u \geq b_0$. Sie berührt die Gerade $u=b_0$ im Punkt (b_0, b_1) . Für $b_1^2 < 4b_0$ handelt es sich um eine Ellipse, für $b_1^2 = 4b_0$ um eine Parabel, in allen übrigen Fällen um eine Hyperbel.

Die Ungleichung $f_3^{(1)}(u,v) < 0$ definiert für $b_1^2 < 4b_0$ das Innere der Ellipse, für $b_1^2 \geq 4b_0$ das von den Parabel- bzw. Hyperbel-ästen eingeschlossene Gebiet in der (u,v) -Ebene. Die Funktion $g_3^{(1)}(u,v)$ ist für $u > b_0$, also in dem Bereich, in dem $S_3^{(1)}$ untersucht werden soll, positiv. Insbesondere gilt dies für alle Punkte (u,v) mit $f_3^{(1)}(u,v) \geq 0$. Da $S_3^{(1)}$ und $f_3^{(1)}(u,v)$ stetige Funktionen in den Variablen u und v sind, muß die Kurve $S_3^{(1)} = 0$ für beliebige Werte k aus dem Intervall $0 < k \leq 1$ innerhalb der Kurve $f_3^{(1)}(u,v) = 0$ verlaufen. Das Gebiet $f_3^{(1)}(u,v) < 0$ enthält daher alle Punkte (u,v) , für die bei hinreichend klein gewähltem Wert k die Forderung $S_3^{(1)} < 0$ erfüllt werden kann.

In entsprechender Weise kann man zeigen, daß die Bedingung $S_3^{(2)} < 0$ für $u < b_0$ und hinreichend klein gewähltes $k > 0$ in einem Gebiet der (u, v) -Ebene erfüllt werden kann, das durch die Forderung

$$f_3^{(2)}(u, v) \equiv 3u^2 - b_1 uv + b_0 v^2 + (b_1^2 - 4b_0)u - b_0 b_1 v + b_0^2 < 0$$

gegeben ist. Die Randkurve $f_3^{(2)}(u, v) = 0$, die im Punkt (b_0, b_1) eine senkrechte Tangente hat, ist im Fall $b_1^2 < 12b_0$ eine Ellipse, im Fall $b_1^2 = 12b_0$ eine Parabel, sonst eine Hyperbel.

Für die Untersuchungen im Anhang III ist von Bedeutung, daß im Punkt (b_0, b_1) nicht nur die Kurven $f_3^{(v)}(u, v) = 0$ sondern auch die Kurven $S_3^{(v)} = 0$ ($v=1, 2$) eine senkrechte Tangente besitzen.

In den Bildern 3.7a und 3.7b ist für je einen Fall mit $b_1^2 < 2b_0$ bzw. $b_1^2 > 4b_0$ dasjenige Gebiet in der (u, v) -Ebene dargestellt, in dem die Forderungen, daß $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_3^{(1)}$ bzw. $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$, $S_3^{(2)}$ nicht gleiches Vorzeichen haben dürfen, für den Grenzfall $k > 0$ erfüllt werden können. Ist $b_1^2 < 2b_0$, so schließen sich die Bedingungen $S_1^{(v)} < 0$ und $S_2^{(v)} < 0$ ($v=1, 2$) gegenseitig aus. Da außerdem die Gebiete, in denen $S_1^{(v)} < 0$, $S_2^{(v)} < 0$, $S_3^{(v)} \leq 0$ ($v=1, 2$) gilt, für nichtverschwindendes k innerhalb der entsprechenden Gebiete liegen, die sich für $k > 0$ ergeben, ist eine Realisierung nach FOSTER und LADENHEIM für Punkte außerhalb des schraffierten Gebiets von Bild 3.7a sicher nicht möglich. An die im schraffierten Gebiet liegenden Punkte sind zusätzlich die Bedingungen (3.4b, c, d, e), (3.9) und (3.10) bzw. (3.11) zu stellen. Die Bedingungen (3.4b, c, d, e) und (3.9) wurden bereits diskutiert.

Die Randkurve des Gebiets in der (u, v) -Ebene, das durch die Bedingung (3.10) definiert wird, ist nur im Grenzfall $k > 0$ ein Kegelschnitt, in allen übrigen Fällen dagegen eine Kurve höherer Ordnung. Beachtet man die im Anhang I abgeleiteten Verknüpfungen zwischen den im Satz 3 eingeführten Größen S_1 , S_2 , S_3 und S_4 , so kann man über den Verlauf der Kurve $S_4^{(1)} = 0$ zumindest aussagen, daß sie die Kurven $S_1^{(1)} = 0$ und $S_2^{(1)} = 0$ in den

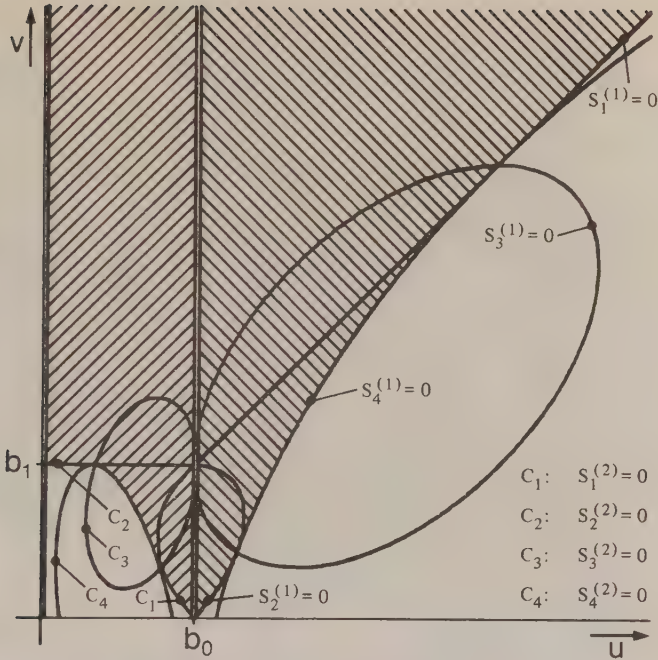


Bild 3.8a: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen für die Realisierbarkeit nach FOSTER und LADENHEIM im Fall $b_0=b_1=1$, $k \rightarrow 0$

erfüllt werden können, im Intervall $0 < k < k_{\min}$ dagegen nicht. Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Bedingungen für die kanonische und übertragerfreie Realisierbarkeit der Impedanzen des überbrückten T-Glieds nach BRUNE, wo stets die Null die untere Grenze für k bildet.

Eine zusätzliche Einschränkung für u und v ist durch die Bedingung (3.9) gegeben, die hier im Gegensatz zum Fall $b_1^2 < 4b_0$ nicht automatisch erfüllt ist.

Im Bild 3.8b ist für ein Wertepaar (b_0, b_1) mit $b_1^2 > 4b_0$ das Ge-

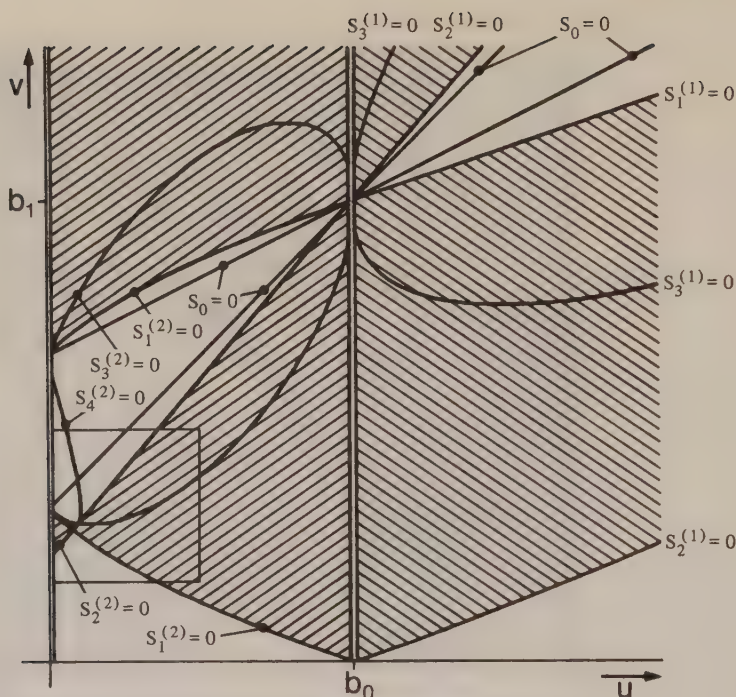


Bild 3.8b: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen für die Realisierbarkeit nach FOSTER und LADENHEIM im Fall $b_0=2$, $b_1=3$, $k \rightarrow 0$

biet in einem Teil des ersten Quadranten der (u, v) -Ebene schraffiert dargestellt, in dem die Realisierungsbedingungen von FOSTER und LADENHEIM für $k \rightarrow 0$ erfüllt sind. Eine vergrößerte Darstellung der unmittelbaren Umgebung um den Punkt, in dem sich die Kurven $S_2^{(2)}=0$, $S_3^{(2)}=0$, $S_4^{(2)}=0$ schneiden, zeigt Bild 3.8c. Auf eine vollständige graphische Darstellung der für $u > b_0$ gültigen Realisierungsbedingungen mußte wegen der ungünstigen Maßstabsverhältnisse verzichtet werden.

Die Forderung (3.9) ist im Fall $k \rightarrow 0$, wie man zeigen kann, ohne Bedeutung. Sie spielt nur für positive Werte von k eine

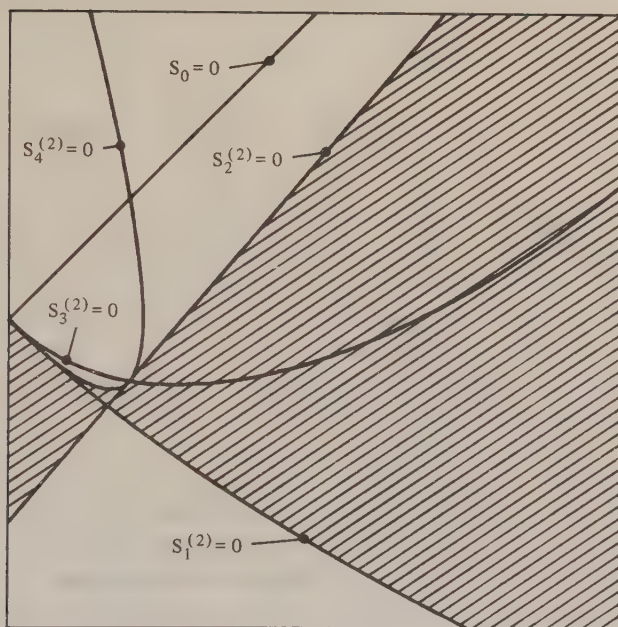


Bild 3.8c: Vergrößerter Ausschnitt der Umgebung
um den Schnittpunkt der Kurven $S_2^{(2)}=0$,
 $S_3^{(2)}=0$, $S_4^{(2)}=0$ aus Bild 3.8b

Rolle, wurde aber der Vollständigkeit wegen in die Bilder 3.8b und 3.8c aufgenommen.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurden über die im Abschnitt 3.1 genannten Einschränkungen hinaus keine Voraussetzungen bezüglich der Lage der Nullstellen und Pole von $H_E(p)$ gemacht. Im folgenden Abschnitt wird für den Sonderfall reeller Nullstellen und Pole von $H_E(p)$ nachgewiesen, in welchen Fällen die Realisierung von $H_E(p)$ durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied hinsichtlich des maximal erreichbaren konstanten Faktors k günstiger ist als die Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder.

3.3.4.2. Funktionen mit reellen Nullstellen und Polen

Übertragungsfunktionen der Form

$$H_E(p) = \frac{(p + q_1)(p + q_2)}{(p + p_1)(p + p_2)} \quad (p_1, p_2 > 0; q_1, q_2 \geq 0),$$

die den Bedingungen von Satz 1b genügen, lassen sich sowohl durch eine Kettenschaltung zweier überbrückter T-Glieder mit je zwei Energiespeichern als auch durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor k realisieren. Wie im Fall e von Abschnitt 3.3.3 hängt es dabei von der Größe der Parameter p_1 , p_2 , q_1 und q_2 ab, welche Realisierungsmöglichkeit den größeren zulässigen Bereich für k ergibt. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.3.3 kann allerdings die Frage, ob eine übertragerfreie Realisierung durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied möglich ist, hier nicht mit Hilfe der Bedingungen von Satz 1b sondern nur anhand der im Abschnitt 3.3.4.1 genannten einschlägigen Bedingungen beantwortet werden. Eine Erleichterung bedeutet dabei die Tatsache, daß im Fall reeller Pole oder Nullstellen von $H_E(p)$ die Realisierung der Impedanzen des überbrückten T-Glieds nach FOSTER und LADENHEIM bezüglich des maximal erreichbaren Faktors k keine Vorteile gegenüber der kanonischen und übertragerfreien Realisierung nach BRUNE bietet (vgl. Anhang III). Es genügt daher, in den Fällen $q_1 q_2 \geq p_1 p_2$ die Bedingungen (3.5a,b) und in den übrigen Fällen die Bedingungen (3.7a,b) zu prüfen, wobei zusätzlich darauf zu achten ist, daß die Forderung (3.4a) eingehalten wird.

- a) Für den Fall, daß $H_E(p)$ durch zwei überbrückte T-Glieder mit je zwei Energiespeichern verwirklicht wird, läßt sich der maximal erreichbare Faktor k als Produkt zweier nach Abschnitt 3.2.2 zu berechnender Faktoren in einem Schaubild darstellen. Dabei sind p_1 und p_2 wiederum als feste Parameter der Übertragungsfunktion $H_E(p)$ angenommen, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p_1 \leq p_2$ vorausgesetzt

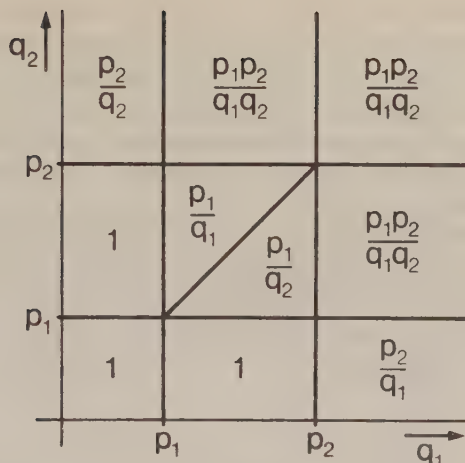


Bild 3.9: Darstellung der Abhängigkeit des maximal erreichbaren Faktors k von den Größen p_1 , p_2 , q_1 , q_2 bei der Realisierung von $k H_E(p)$ durch zwei überbrückte T-Glieder mit je zwei Energiespeichern

wird. Die Größen q_1 und q_2 sollen variabel sein und ein rechtwinkliges Koordinatensystem bilden, dessen erster Quadrant sich in Gebiete mit unterschiedlichem Maximalwert von k aufteilen läßt. Das Bild 3.9 veranschaulicht die Verhältnisse im einzelnen.

- b) Bei der Realisierung von $k H_E(p)$ durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied sind nach Abschnitt 3.4.3.1 die Fälle $a_0 \leq b_0$ und $a_0 \geq b_0$ zu unterscheiden.

Die für $a_0 \leq b_0$ gültige Realisierungsbedingung (3.7a) geht im vorliegenden Fall

$$a_0 = q_1 q_2, \quad a_1 = q_1 + q_2, \quad b_0 = p_1 p_2, \quad b_1 = p_1 + p_2$$

wegen $k > 0$ in die Ungleichung

$$q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 - (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) + p_1 p_2 \leq 0$$

über. Ihr entspricht in der (q_1, q_2) -Ebene ein Gebiet, das von einer Ellipse eingeschlossen wird, die durch die Punkte $(0, p_1)$, $(0, p_2)$, (p_1, p_2) , (p_2, p_1) , $(p_2, 0)$, $(p_1, 0)$ geht.

Durch die Forderungen $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ und $q_1 q_2 \leq p_1 p_2$ wird dieses Gebiet zusätzlich durch die q_2 -Achse, die q_1 -Achse und die Hyperbel $q_1 q_2 = p_1 p_2$ begrenzt. Da die Ungleichung (3.7a) keine einschränkenden Bedingungen an die positive Konstante k stellt und da sie nach Abschnitt 3.4.3.1 für $a_0 \leq b_0$ nicht erfüllt werden kann, wenn $a_1 > b_1$ ist, folgt aus der Forderung (3.4a), daß

$$0 < k \leq 1$$

gelten muß.

Die Bedingung (3.5b), deren Erfüllung unter der Voraussetzung $a_0 \geq b_0$, d.h. $q_1 q_2 \geq p_1 p_2$ eine übertragerfreie Realisierung mit vier Energiespeichern sichert, geht im vorliegenden Fall wegen $k > 0$ in

$$q_1 q_2 (q_1 q_2 - p_1 p_2) - (q_1 + q_2) [q_1 q_2 (p_1 + p_2) - p_1 p_2 (q_1 + q_2)] \leq 0$$

über. Die Randkurve dieses Gebiets ist durch die Gleichung

$$\frac{q_1^2 q_2^2}{p_1 p_2} \left\{ \frac{p_1^2 p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_1^2 p_2^2}{q_1 q_2} + \frac{p_1^2 p_2^2}{q_2^2} - \left[\frac{p_1 p_2}{q_1} + \frac{p_1 p_2}{q_2} \right] (p_1 + p_2) + p_1 p_2 \right\} = 0$$

gegeben. Da nur Punkte in der (q_1, q_2) -Ebene oberhalb der Hyperbel $q_1 q_2 = p_1 p_2$ von Interesse sind, ist $q_1 > 0$ und $q_2 > 0$. Damit erhält man die Randkurve des Gebiets, das der Bedingung (3.5b) entspricht, indem man in der zuletzt genannten Gleichung den Ausdruck innerhalb der geschweiften Klammer gleich Null setzt. Das gesuchte Gebiet ergibt sich demnach aus dem zuvor diskutierten, in welchem die Bedingung (3.7a) erfüllt ist, wenn man es einer Abbildung unterwirft, bei der die Punkte mit den Koordinaten (q_1, q_2) in die Punkte

mit den Koordinaten $(p_1 p_2 / q_1, p_1 p_2 / q_2)$ übergehen. Die Randkurve verläuft daher, soweit sie oberhalb der Hyperbel $q_1 q_2 = p_1 p_2$ gelegen ist, innerhalb der Gebiete mit $0 < q_1 \leq p_1$, $q_2 \geq p_2$ bzw. $q_1 \geq p_1$, $0 < q_2 \leq p_2$ bzw. $q_1 \geq p_1$, $q_2 \geq p_2$. Sie nähert sich für $q_1 \rightarrow \infty$ asymptotisch den Geraden $q_2 = p_1$ bzw. $q_2 = p_2$ und für $q_2 \rightarrow \infty$ den Geraden $q_1 = p_1$ bzw. $q_1 = p_2$.

Da die Ungleichung (3.5b) keine einschränkenden Bedingungen an k stellt und da sie für $a_0 \geq b_0$ nicht erfüllt werden kann, wenn $b_1/a_1 < b_0/a_0$ ist, folgt aus der Forderung (3.4a), daß

$$0 < k \leq \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

gelten muß.

Die Gebiete in der (q_1, q_2) -Ebene, in denen die Bedingungen (3.7a) bzw. (3.5b) erfüllt sind, und den in diesen Gebieten maximal erreichbaren konstanten Faktor k zeigt das Bild 3.10.

Ein Vergleich mit Bild 3.9 ergibt, daß die Realisierung durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied für $p_1 < q_1 < p_2$, $p_1 < q_2 < p_2$ generell und für $0 < q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ bzw. $q_1 > p_2$, $0 < q_2 < p_1$ zumindest in gewissen Fällen hinsichtlich des maximal erreichbaren Faktors k vorteilhafter ist als die Realisierung durch eine Kettenschaltung zweier überbrückter T-Glieder mit je zwei Energiespeichern. Andererseits ist die Bedingung (3.7a) in einem Teil des Gebiets $0 \leq q_1 < p_1$, $0 \leq q_2 < p_1$ und die Bedingung (3.5b) in einem Teil des Gebiets $q_1 > p_2$, $q_2 > p_2$ nicht zu erfüllen. Dagegen ist in diesen Fällen eine Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder bis auf denjenigen k -Wert möglich, der mit Zweitoren der im Kapitel 1 eingeführten Art maximal erreicht werden kann.

Es lassen sich also mit Ausnahme eines Teils der Fälle $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ und $q_1 > p_2$, $0 \leq q_2 < p_1$ Realisierungen von $k_{HE}(p)$ angeben, die hinsichtlich des konstanten Faktors k durch Netzwerke der hier betrachteten Klasse nicht mehr

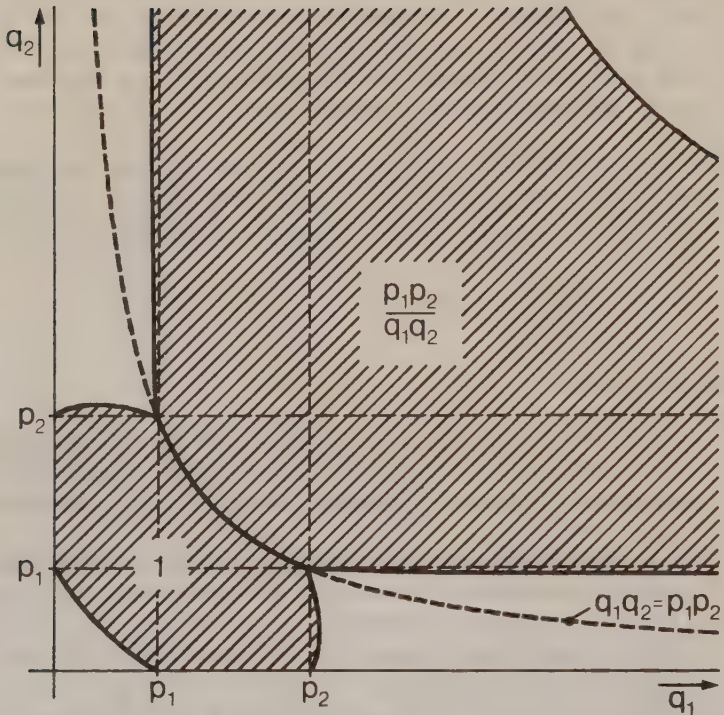


Bild 3.10: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen (3.5b) und (3.7a) für den Fall von Übertragungsfunktionen mit reellen Nullstellen und Polen

überboten werden können. Zu diskutieren sind noch die genannten Ausnahmefälle.

Im folgenden wird gezeigt, daß für $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ die Realisierungsbedingungen (3.5a) bzw. (3.7b) mit k -Werten erfüllt werden können, die jedenfalls größer sind als der bei Realisierungen mit zwei überbrückten T-Gliedern maximal erreichbare Wert p_2/q_2 .

Mit $k = p_2/q_2$ folgt aus der für $q_1 q_2 \geq p_1 p_2$ gültigen Bedingung

(3.5a) nach kurzer Zwischenrechnung

$$(p_1 - q_1) \left[\frac{q_2^2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_2 + q_1 - p_2 \right] \geq 0 .$$

Der erste Faktor $(p_1 - q_1)$ des Produkts auf der linken Seite dieser Ungleichung ist positiv; für den zweiten läßt sich eine untere Grenze angeben. Es gilt nämlich wegen

$q_1 \geq p_1 p_2 / q_2$ die Beziehung

$$\frac{q_2^2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_2 + q_1 - p_2 \geq \frac{q_2^2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_2 + \frac{p_1 p_2}{q_2} - p_2$$

oder nach Umformung der rechten Seite

$$\frac{q_2^2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_2 + q_1 - p_2 \geq \frac{1}{p_2 q_2} (q_2 - p_1)(q_2^2 - p_2^2) .$$

Der Ausdruck

$$(p_1 - q_1) \left[\frac{q_2^2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_2 + q_1 - p_2 \right]$$

ist demzufolge im Gebiet $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$, $q_1 q_2 \geq p_1 p_2$ stets positiv, und da die linke Seite der Ungleichung (3.5a) eine stetige Funktion in k ist, müssen in jedem Fall auch größere k -Werte als $k = p_2 / q_2$ existieren, für die diese Ungleichung ebenfalls gilt.

Die Realisierungsbedingung (3.7b) kann für $k = p_2 / q_2$ im restlichen Teil des Gebiets $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ erfüllt werden, wenn

$$(q_2 - p_2) \left[p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - \frac{p_1^2 q_1 q_2}{p_2} \right] \geq 0$$

gilt. Wegen $q_2 > p_2$ ist dies nur dann möglich, wenn

$$p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - \frac{p_1^2 q_1 q_2}{p_2} \geq 0$$

ist. Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Ungleichung läßt sich mit Hilfe der Beziehung $q_1 q_2 \leq p_1 p_2$ nach unten abschätzen. Es muß nämlich

$$p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - \frac{p_1^2 q_1 q_2}{p_2} \geq p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - p_1^3$$

oder nach Umformung der rechten Seite

$$p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - \frac{p_1^2 q_1 q_2}{p_2} \geq (q_2 - p_1)(p_1^2 - q_1^2)$$

gelten. Der Ausdruck

$$(q_2 - p_2) \left[p_1^2 q_2 + p_1 q_1^2 - q_1^2 q_2 - \frac{p_1^2 q_1 q_2}{p_2} \right]$$

ist also im Gebiet $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$, $q_1 q_2 \leq p_1 p_2$ stets positiv, und da die linke Seite der Ungleichung (3.7b) eine stetige Funktion in k ist, müssen in jedem Fall auch größere k -Werte als $k = p_2/q_2$ existieren, für welche diese Ungleichung ebenfalls erfüllt werden kann.

Damit ist gezeigt, daß für $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ die Realisierung von $H_E(p)$ durch ein überbrücktes T-Glied im Hinblick auf den maximal erreichbaren konstanten Faktor günstiger ist als eine Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder mit jeweils zwei Energiespeichern. Das gleiche gilt natürlich aus Symmetriegründen auch für $q_1 > p_2$, $0 \leq q_2 < p_1$.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß hinsichtlich der Größe des zulässigen Wertebereichs für k die Realisierung von $H_E(p)$ durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied günstiger ist, wenn $p_1 < q_1 < p_2$, $p_1 < q_2 < p_2$ oder $0 \leq q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$ oder $q_1 > p_2$,

$0 \leq q_2 < p_1$ ist. In allen übrigen Fällen kann dagegen höchstens eine Lösung angegeben werden, die gleich gut oder schlechter ist als die Realisierung durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder mit jeweils zwei Energiespeichern. In einem Teil dieser Fälle ist $H_E(p)$ sogar weder unmittelbar noch bis auf einen konstanten Faktor durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied zu verwirklichen.

3.3.4.3. Funktionen, die nicht durch ein Übertragerfreies überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern realisiert werden können

Bei der Behandlung von Funktionen, die nicht nach Abschnitt 3.3.4.1 verwirklicht werden können, ist es zweckmäßig, folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Übertragungsfunktionen mit reellen Polen:

Existiert kein positiver k -Wert, für den die normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k H_E(p)} - 1$$

einer Übertragungsfunktion

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p + p_1)(p + p_2)} \quad (a_1 \geq 0; a_1^2 < 4a_0; p_1, p_2 > 0)$$

mit zwei reellen Polen kanonisch und übertragerfrei realisiert werden kann, so wird, da sich $H_E(p)$ wegen $a_1^2 < 4a_0$ nicht in zwei Übertragungsfunktionen ersten Grades aufspalten läßt, mit einem Hilfspolynom $p+x$ erweitert. Die Funktion $H_E(p)$ kann dann als Produkt

$$H_E(p) = H_{E1}(p) H_{E2}(p)$$

mit

$$H_{E1}(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p + p_1)(p + x)}, \quad H_{E2}(p) = \frac{p + x}{p + p_2} \quad (x > 0)$$

geschrieben werden.

Die erste Teilfunktion $H_{E1}(p)$ ist gemäß Abschnitt 3.3.4.1 bis auf einen konstanten Faktor k_1 aus dem zulässigen Wertebereich

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[1, \frac{p_1 + \frac{a_0}{p_1}}{a_1} \right]$$

Übertragerfrei durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern realisierbar, wenn $x = a_0/p_1$ gewählt wird. Da $a_1^2 < 4a_0$ vorausgesetzt wurde, erhält man als obere Grenze für k_1 den Wert Eins.

Die Funktion $H_{E2}(p)$ kann nach Abschnitt 3.2.2 bis auf einen konstanten Faktor k_2 mit

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{p_1 p_2}{a_0} \right]$$

verwirklicht werden.

Es ist also möglich, die gegebene Übertragungsfunktion $H_E(p)$ durch eine Kettenschaltung aus zwei überbrückten T-Gliedern mit insgesamt sechs Energiespeichern übertragerfrei bis auf einen konstanten Faktor $k = k_1 k_2$ zu realisieren, der sich im Intervall

$$0 < k \leq \text{Min} \left[1, \frac{p_1 p_2}{a_0} \right],$$

d.h. dem bei Zweitoren der hier behandelten Klasse größtmöglichen Intervall bewegen kann.

Da die Aufteilung der beiden linearen Nennerfaktoren von $H_E(p)$ auf die Teilübertragungsfunktionen $H_{E1}(p)$ und $H_{E2}(p)$ willkürlich vorgenommen werden darf, lassen sich unter der Voraussetzung $p_1 \neq p_2$ zwei Netzwerke von gleicher Struktur und gleicher Übertragungskonstante k , jedoch mit unterschiedlichen Werten der Netzwerkelemente angeben. Abgesehen vom Sonderfall $a_1 = 0$, bei dem $H_{E1}(p)$ die Realisierungsbedingungen von Satz 1b nur für $x = a_0/p_1$ erfüllt, sind im allgemeinen bei passender Wahl des Parameters x noch weitere Übertragerfreie Realisierungen von anders gearteter Netzwerkstruktur möglich. Der Bereich für die Konstante k kann damit aber prinzipiell nicht erweitert werden.

b) Übertragungsfunktionen mit reellen Nullstellen:

Nach dem Erweitern mit einem Faktor $p+x$ kann die Übertragungsfunktion

$$H_E(p) = \frac{(p+q_1)(p+q_2)}{p^2 + b_1p + b_0}$$

$$(0 \leq q_1 \leq q_2; b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0; b_0 \neq q_1q_2)$$

als Produkt

$$H_E(p) = H_{E1}(p) H_{E2}(p)$$

mit

$$H_{E1}(p) = \frac{(p+q_1)(p+x)}{p^2 + b_1p + b_0}, \quad H_{E2}(p) = \frac{p+q_2}{p+x} \quad (x > 0)$$

geschrieben werden.

Der Bereich, in dem sich x bewegen darf, damit $H_{E1}(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k_1 Übertragerfrei durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern realisiert werden kann, ist den Bildern 3.5a und 3.8a zu entnehmen, wenn man beachtet, daß die Beziehungen

$$q_1 x = u \quad \text{und} \quad q_1 + x = v$$

eine Gerade in der (u,v) -Ebene beschreiben. Diese fällt für $q_1 = 0$ mit der v -Achse zusammen und verläuft für $q_1 > 0$ mit der Steigung $1/q_1$ durch den Punkt $(0, q_1)$. Wegen $x > 0$ ist im folgenden nur das oberhalb von $v = q_1$ gelegene Geradenstück von Interesse. Für alle Punkte auf diesem Geradenstück, die in den schraffierten Gebieten der Bilder 3.5a oder 3.8a liegen, ist gemäß Abschnitt 3.3.4.1 eine Übertragerfreie Realisierung von $H_{E1}(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k_1 durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern möglich. Solche Punkte müssen in jedem Fall existieren. Da $H_{E2}(p)$ für beliebige positive x -Werte bis auf einen konstanten Faktor k_2 realisierbar ist, kann immer eine Kettenanordnung aus zwei Übertragerfreien überbrückten T-Gliedern mit insgesamt sechs Energiespeichern angegeben werden, die $H_E(p)$ abgesehen von einem konstanten Faktor k verwirklicht.

Schließt man zunächst den Fall $q_1 = 0$ aus, dann darf beispielsweise $x = b_0/q_1$ gewählt werden. Dem zugehörigen Punkt $(b_0, q_1 + b_0/q_1)$ in der (u,v) -Ebene entspricht sicher eine Übertragerfreie Realisierung von $k_1 H_{E1}(p)$ mit

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1}{q_1 + \frac{b_0}{q_1}},$$

und $H_{E2}(p)$ kann bis auf einen konstanten Faktor k_2 aus dem Intervall

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_0}{q_1 q_2} \right]$$

verwirklicht werden. Für den Gesamtfaktor $k = k_1 k_2$ ergibt sich damit der zulässige Bereich

$$0 < k \leq \frac{b_1}{q_1 + \frac{b_0}{q_1}} \cdot \text{Min} \left[1, \frac{b_0}{q_1 q_2} \right].$$

Da die Aufteilung der Nullstellen $p = -q_1$ und $p = -q_2$ auf die Teilfunktionen $H_{E1}(p)$ und $H_{E2}(p)$ willkürlich vorgenommen werden kann, läßt sich im Fall $q_1 \neq q_2$ eine weitere Realisierung von $H_E(p)$ mit einem zulässigen k -Intervall angeben, das sich aus dem obigen ergibt, wenn man q_1 und q_2 miteinander vertauscht.

Unter der Annahme $q_1 < q_2$, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit getroffen werden darf, sofern $q_1 \neq q_2$ ist, kann man zeigen, daß für $q_1 q_2 > b_0$ der Faktor $p + q_1$ und für $q_1 q_2 < b_0$ der Faktor $p + q_2$ in die Teilübertragungsfunktion $H_{E1}(p)$ aufzunehmen ist, wenn das zulässige Intervall für die Konstante k möglichst groß werden soll. Ob für $q_1 q_2 > b_0$ im Bereich $b_0/q_1 < x \leq q_2$ bzw. für $q_1 q_2 < b_0$ im Bereich $q_1 \leq x < b_0/q_2$ ein x -Wert mit einem größeren zulässigen k -Intervall existiert, muß jeweils von Fall zu Fall untersucht werden.

Für $q_1 = 0$ und $q_2 \geq 0$ kann die Zerlegung

$$H_{E1}(p) = \frac{p(p+x)}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad H_{E2}(p) = \frac{p+q_2}{p+x}$$

gewählt werden. Die normierte Impedanz

$$z_1(p) = \frac{1}{k_1 H_{E1}(p)} - 1 = \frac{b_0}{k_1 x} \frac{1}{p} + \frac{\left[\frac{1}{k_1} - 1 \right] p + \left[\frac{b_1}{k_1} - x - \frac{b_0}{k_1 x} \right]}{p + x}$$

läßt sich kanonisch und Übertragerfrei verwirklichen, wenn

$$0 < k_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 < k_1 \leq \frac{1}{x} \left[b_1 - \frac{b_0}{x} \right]$$

gilt. Da der Ausdruck $(b_1 - b_0/x)/x$ als Funktion von x wegen $b_1^2 < 4b_0$ nur Werte annehmen kann, die kleiner als Eins sind, ist die erste der beiden obigen Realisierungsbedingungen in der zweiten Bedingung enthalten. Diese kann nur für $x > b_0/b_1$ erfüllt werden. Die Übertragungsfunktion $H_{E2}(p)$ läßt sich nach Abschnitt 3.2 realisieren. Berücksichtigt man dabei, daß für $q_1 = 0$ die Funktion $H_E(p)$ nach Abschnitt 3.3.4.1

durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden kann, wenn $b_1 q_2 > b_0$ gilt, bleibt nur noch der Fall $b_1 q_2 \leq b_0$ zu untersuchen. Da x/q_2 für $x > b_0/b_1$ und $b_1 q_2 \leq b_0$ größer als Eins ist, ergibt sich nach Abschnitt 3.2 für k_2 das zulässige Intervall $0 < k_2 \leq 1$. Die Funktion $H_E(p)$ kann damit im Sonderfall $q_1 = 0$ bis auf einen konstanten Faktor $k = k_1 k_2$ realisiert werden, der sich im Bereich

$$0 < k \leq \frac{1}{x} \left[b_1 - \frac{b_0}{x} \right]$$

bewegen darf. Die obere Grenze dieses Bereichs nimmt für $x = 2b_0/b_1$ ihren Maximalwert $b_1^2/4b_0$ an.

- c) Übertragungsfunktionen mit rein imaginären Nullstellen und nicht-reellen Polen:

Die Übertragungsfunktion

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (a_0, b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0; a_0 \neq b_0)$$

läßt sich nach Erweiterung mit einem Polynom $p^2 + yp + a_0$ ($y > 0$) in der Form

$$H_E(p) = H_{E1}(p) H_{E2}(p)$$

mit

$$H_{E1}(p) = \frac{p^2 + a_0}{p^2 + yp + a_0}, \quad H_{E2}(p) = \frac{p^2 + yp + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

schreiben.

Die Funktion $H_{E1}(p)$ ist für jeden nicht-negativen Wert von y durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern ohne Übertrager realisierbar. Die Möglichkeiten für eine

Übertragerfreie Verwirklichung von $H_{E2}(p)$ durch ein überbrücktes T-Glied lassen sich am einfachsten anhand der Bilder 3.5a und 3.8a erkennen. Dabei sind infolge der speziellen Wahl des Erweiterungspolynoms nur solche Punkte innerhalb der schraffierten Gebiete des ersten Quadranten der (u,v) -Ebene von Interesse, die auf der parallel im Abstand a_0 zur v -Achse verlaufenden Geraden liegen. Die Grenzen der Intervalle, in denen sich die Größen y und k_2 bewegen dürfen, damit $k_2 H_{E2}(p)$ durch ein überbrücktes T-Glied mit kanonisch und übertragerfrei nach BRUNE realisierbaren Impedanzen verwirklicht werden kann, lassen sich formelmäßig angeben.

Im einzelnen erhält man für $a_0 > b_0$ aus den Bedingungen (3.5a) und (3.5b) jeweils in Verbindung mit der Forderung (3.4a):

Falls die Koeffizienten von $H_E(p)$ die Bedingung

$$1 - \frac{4b_0}{b_1^2} \left[1 - \frac{b_0}{a_0} \right] \geq 0$$

erfüllen, kann für

$$0 < k_2 \leq \frac{b_0}{a_0}$$

und

$$y_1^{(1)} \leq y \leq y_2^{(1)}$$

mit

$$y_{1,2}^{(1)} = \frac{a_0 b_1}{2 b_0} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b_0}{b_1^2} \left[1 - \frac{b_0}{a_0} \right]} \right]$$

eine übertragerfreie Realisierung von $k_2 H_{E2}(p)$ angegeben werden. In jedem Fall existiert ein Intervall

$$y_1^{(2)} \leq y \leq y_2^{(2)}$$

mit den Grenzen

$$y_{1,2}^{(2)} = \frac{1+k_2}{k_2} \frac{b_1}{2} \mp \sqrt{\frac{1-k_2}{k_2} \left[\frac{1-k_2}{k_2} \frac{b_1^2}{4} - (a_0 - b_0) \right]},$$

in dem eine Übertragerfreie Realisierung möglich ist, falls k_2 einen Wert aus dem Bereich

$$0 < k_2 \leq \frac{1}{\frac{4}{b_1^2}(a_0 - b_0) + 1}$$

besitzt.

Aus den Bedingungen (3.7a) und (3.7b) in Verbindung mit der Forderung (3.4a) erhält man die entsprechenden Grenzen der zulässigen Bereiche von y und $k_2=k$ für $a_0 < b_0$:

Erfüllen die Koeffizienten von $H_E(p)$ die Ungleichung

$$1 - \frac{4}{b_1^2} (b_0 - a_0) \geq 0,$$

so läßt sich $k_2 H_{E2}(p)$ mit minimalem Aufwand an Energiespeichern übertragerfrei verwirklichen, wenn y und k_2 derart gewählt werden, daß

$$y_1^{(3)} \leq y \leq y_2^{(3)}$$

mit

$$y_{1,2}^{(3)} = \frac{b_1}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4}{b_1^2} (b_0 - a_0)} \right]$$

und

$$0 < k_2 \leq 1$$

gilt. Genügt $H_E(p)$ dieser Koeffizientenbedingung nicht, so kann jedenfalls für

$$0 < k_2 \leq \frac{1}{\frac{4}{b_1^2}(b_0 - a_0) + \frac{a_0}{b_0}}$$

und

$$y_1^{(4)} \leq y \leq y_2^{(4)}$$

mit

$$y_{1,2}^{(4)} = \frac{b_0 + k_2 a_0}{2 k_2 b_0} b_1 \mp \sqrt{\frac{b_0 - k_2 a_0}{k_2 b_0} \left[\frac{b_0 - k_2 a_0}{k_2 b_0} \frac{b_1^2}{4} - (b_0 - a_0) \right]}$$

eine Übertragerfreie Realisierung angegeben werden.

Die Möglichkeiten zur Realisierung der normierten Impedanz

$$z_2(p) = \frac{1}{k_2 H_{E2}(p)} - 1$$

nach FOSTER und LADENHEIM prüft man zweckmäßigerweise von Fall zu Fall auf numerischem Weg.

Nach den obigen Ausführungen kann die Übertragungsfunktion $H_E(p)$ stets durch eine Kettenanordnung zweier Überbrückter T-Glieder mit jeweils vier Energiespeichern ohne Übertrager bis auf einen Faktor k verwirklicht werden, dessen obere Grenze mit derjenigen von k_2 identisch ist, da $H_{E1}(p)$ immer uneingeschränkt realisierbar ist.

d) Übertragungsfunktionen mit nicht-reellen Nullstellen und Polen:

Nach Erweiterung mit einem Polynomfaktor $p^2 + yp + x$ ($x, y > 0$) kann die Funktion

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$(a_1, b_1 > 0; a_1^2 < 4a_0; b_1^2 < 4b_0; a_0 \neq b_0)$$

auf die Form

$$H_E(p) = H_{E1}(p) H_{E2}(p)$$

gebracht werden, wobei sich die Übertragungsfunktionen

$$H_{E1}(p) = \frac{p^2 + yp + x}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad H_{E2}(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + yp + x}$$

bei passender Wahl von x und y jeweils bis auf einen konstanten Faktor k_1 bzw. k_2 durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern realisieren lassen.

Bei der Behandlung der Funktion $H_{E1}(p)$ können die in den Bildern 3.5a und 3.8a für den Fall $b_1^2 < 4b_0$ veranschaulichten Ergebnisse des Abschnitts 3.4.3.1 direkt übernommen werden. Man hat hierzu lediglich die dort auftretenden Größen $u \equiv a_0$ und $v \equiv a_1$ durch die Zählerkoeffizienten x bzw. y der Funktion $H_{E1}(p)$ zu ersetzen. Für alle Wertepaare (x, y) , die Punkten in den schraffierten Gebieten von Bild 3.5a oder 3.8a entsprechen, ist bei genügend klein gewähltem Wert k_1 eine Übertragerfreie Realisierung von $k_1 H_{E1}(p)$ durch ein Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern möglich.

Die Diskussion der Realisierungsbedingungen für die Funktion $H_{E2}(p)$, bei der die Zählerkoeffizienten als fest und die Nennerkoeffizienten als variabel anzusehen sind, soll hier nicht im einzelnen durchgeführt werden, da sie völlig analog zu den Erörterungen des Abschnitts 3.4.3.1 verläuft. Auch hier lassen sich die Realisierungsbedingungen in einer (x, y) -Ebene graphisch veranschaulichen. Wesentlich ist vor

allein die Tatsache, daß die Randkurven der Gebiete, in denen die Bedingungen für eine Übertragerfreie Realisierung von $k_1 H_{E1}(p)$ bzw. $k_2 H_{E2}(p)$ im theoretischen Grenzfall $k_1 \rightarrow 0$ bzw. $k_2 \rightarrow 0$ erfüllt werden können, durch Kurvengleichungen derselben Form beschrieben werden, die sich nur durch das Auftreten der Konstanten b_0, b_1 im ersten und a_0, a_1 im zweiten Fall unterscheiden.

Bild 3.11 zeigt für einen typischen Fall diejenigen Gebiete in der (x,y) -Ebene, in denen bei hinreichend klein gewählten Faktoren k_1 und k_2 die Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Verwirklichung der normierten Impedanzen

$$z_1(p) = \frac{1}{k_1 H_{E1}(p)} - 1 \quad \text{bzw.} \quad z_2(p) = \frac{1}{k_2 H_{E2}(p)} - 1$$

nach BRUNE erfüllt werden können.

Die Gebiete, in denen sich die Realisierungsbedingungen nach FOSTER und LADENHEIM erfüllen lassen, wurden nicht in das Bild 3.11 aufgenommen, um dessen Übersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen.

Für alle Wertepaare (x,y) , die Punkten in den doppelt schraffierten Gebieten entsprechen, kann sowohl $H_{E1}(p)$ als auch $H_{E2}(p)$ jeweils bis auf einen konstanten Faktor, dessen Maximalwert von x, y und den Koeffizienten von $H_E(p)$ abhängt, durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden. Derartige Gebiete existieren in jedem Fall, da a_0, a_1, b_0, b_1 voraussetzungsgemäß positiv sind, was zur Folge hat, daß die Steigungen sämtlicher durch die Punkte (a_0, a_1) und (b_0, b_1) verlaufender Begrenzungsgeraden im Bild 3.11 endliche Werte haben müssen.

Die optimalen Werte von x und y , bei denen das zulässige Intervall für die Konstante $k=k_1 k_2$ maximal wird, ermittelt man zweckmäßigerweise mit Hilfe eines programmgesteuerten Digitalrechners auf dem nachfolgend beschriebenen Weg.

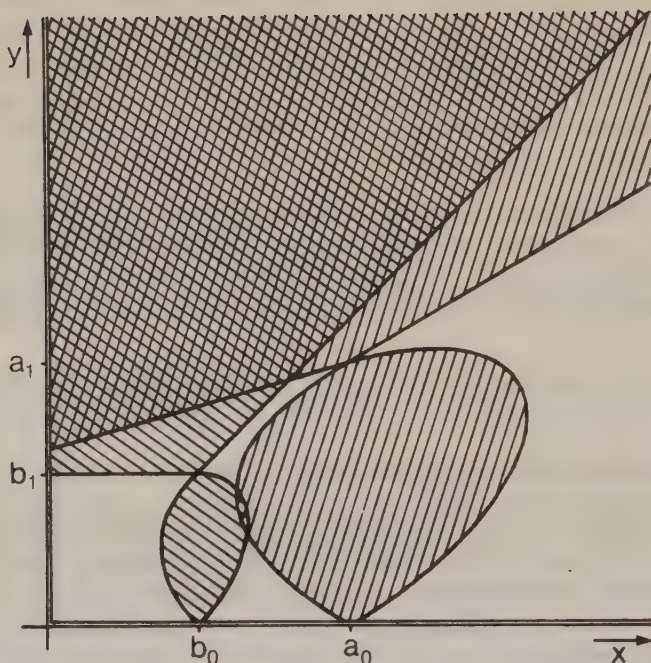


Bild 3.11: Graphische Veranschaulichung der Bedingungen, unter denen die Übertragungsfunktionen $H_{E1}(p)$ und $H_{E2}(p)$ durch überbrückte T-Glieder mit kanonisch und übertragerfrei nach BRUNE realisierbaren Impedanzen verwirklicht werden können

Zunächst wird $x=a_0$ gewählt. In diesem Fall läßt sich der maximal erreichbare k -Wert, bei dem $H_{E1}(p)$ und $H_{E2}(p)$ durch überbrückte T-Glieder mit kanonisch und übertragerfrei nach BRUNE realisierbaren Impedanzen verwirklicht werden können, wie im Fall rein imaginärer Nullstellen von $H_E(p)$ formelmäßig angeben. Entsprechendes gilt für $x=b_0$. Der größere dieser beiden k -Werte, im folgenden mit k_0 bezeichnet, wird

nun dazu verwendet, um das Gebiet in der (x,y) -Ebene einzugrenzen, in dem Punkte liegen können, an denen sich die Realisierungsbedingungen für $H_{E1}(p)$ und $H_{E2}(p)$ mit $k=k_1k_2 > k_0$ erfüllen lassen. Aus der Forderung, daß die Koeffizienten der normierten Impedanzen

$$z_1(p) = \frac{1}{k_1 H_{E1}(p)} - 1 \quad \text{und} \quad z_2(p) = \frac{1}{k_2 H_{E2}(p)} - 1$$

nicht negativ sein dürfen, folgt nämlich

$$x \leq \frac{b_0}{k_1}, \quad y \leq \frac{b_1}{k_1} \quad (0 < k_1 \leq 1)$$

und

$$x \geq k_2 a_0, \quad y \geq k_2 a_1 \quad (0 < k_2 \leq 1).$$

Wenn also $k=k_1k_2 > k_0$ sein soll, dann muß wegen $k_2 \leq 1$ jedenfalls $k_1 > k_0$ gelten, und aus $k > k_0$ und $k_1 \leq 1$ folgt $k_2 > k_0$. Daher sind nur noch Punkte in der (x,y) -Ebene von Interesse, die im Gebiet

$$k_0 a_0 < x < \frac{b_0}{k_0}, \quad k_0 a_1 < y < \frac{b_1}{k_0}$$

liegen. Innerhalb dieser Grenzen kann man nun beispielsweise die Randkurven derjenigen Gebiete abtasten, an denen die Realisierungsbedingungen für $H_{E1}(p)$ erfüllbar sind, und prüfen, an welchen Stellen sie die Randkurven schneiden, innerhalb derer sich die Realisierungsbedingungen für $H_{E2}(p)$ erfüllen lassen. In den so gefundenen Schnittgebieten wird nun systematisch, etwa durch die Berechnung eines schrittweise verfeinerten Rasters der größtmögliche Faktor $k_{\max}$ in Abhängigkeit von x und y berechnet. Die Anwendung üblicher Optimierungsverfahren (z.B. [17], [18]) ist hier nicht möglich, da die partiellen Ableitungen von $k_{\max}$ nach x und y im allgemeinen keine stetigen Funktionen sind.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sowie der Abschnitte 3.3.2 und 3.3.3 zeigen folgendes:

Mindestphasen-Übertragungsfunktionen zweiten Grades, die auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene und im Punkt Unendlich polfrei sind, lassen sich, sofern sie weder unmittelbar noch bis auf einen konstanten Faktor durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden können, nach Erweiterung mit einem Hilfspolynom von höchstens zweitem Grad als Produkt zweier Teilfunktionen darstellen, für die eine derartige Realisierung möglich ist. Im ungünstigsten Fall werden daher acht Energiespeicher für die Realisierung benötigt.

3.4. Ergänzende Bemerkungen

Im Abschnitt 3.1 wurde bereits auf die Möglichkeit hingewiesen, daß eine zu realisierende Mindestphasen-Übertragungsfunktion $H(p)$ auf mehrere Arten in Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden kann. Die Zahl der Zerlegungsmöglichkeiten hängt dabei von der Anzahl sowie der Lage der Nullstellen und Pole von $H(p)$ in der komplexen Frequenzebene ab.

Allgemeingültige Aussagen darüber, welche Faktoren des Zählers und des Nenners von $H(p)$ zu Teilfunktionen ersten bzw. zweiten Grades zusammengefaßt werden müssen, damit $H(p)$ mit möglichst wenigen Energiespeichern bis auf einen möglichst nahe bei Eins gelegenen konstanten Faktor realisiert werden kann, sind vermutlich nicht möglich. Man muß demzufolge, wenn man die in diesem Sinne optimale Lösung für einen konkreten Anwendungsfall ermitteln will, sämtliche denkbaren Kombinationsmöglichkeiten von Zähler- und Nennerfaktoren auf ihre Realisierbarkeit überprüfen. Anhand einer Tabelle, aus der sich für jede Teilfunktion die zu ihrer Verwirklichung notwendige Zahl von Energiespeichern und der maximal erreichbare konstante Faktor ablesen lassen, kann die optimale Realisierung von $H(p)$ durch eine

Kettenanordnung von Übertragerfreien Überbrückten T-Gliedern mit jeweils höchstens vier Energiespeichern leicht ermittelt werden.

Die für die Erstellung dieser Tabelle erforderliche Rechenzeit läßt sich ohne Schwierigkeiten abschätzen, wenn man die Größenordnungen berücksichtigt, in denen sich die Rechenzeiten für die Überprüfung der Realisierbarkeitsbedingungen bei Teilübertragungsfunktionen ersten und zweiten Grades bewegen. Ein leistungsfähiger Digitalrechner benötigt für diese Überprüfung bei Funktionen, die ohne Erweiterung verwirklicht werden können, einige Millisekunden; in den übrigen Fällen beläuft sich die erforderliche Rechenzeit auf einige Zehntelsekunden.

4. DIE REALISIERUNG SPEZIELLER MINDESTPHASEN-ÜBERTRAGUNGS- FUNKTIONEN DRITTEN UND HÖHEREN GRADES DURCH EIN EINZELNES ÜBERBRÜCKTES T-GLIED

4.1. Vorbemerkungen

Wie bereits früher erwähnt, ist der Grund für die im Kapitel 3 vorgenommene Beschränkung auf Teilübertragungsfunktionen ersten und zweiten Grades darin zu sehen, daß nur in diesen Fällen notwendige u n d hinreichende Bedingungen für die Übertragerfreie Realisierbarkeit durch überbrückte T-Glieder mit minimalem Aufwand an Energiespeichern angegeben werden können.

Da man normalerweise bestrebt ist, eine gegebene Übertragungsfunktion $H(p)$ bis auf einen konstanten Faktor K zu realisieren, der möglichst nahe am Idealwert Eins liegt, und da der Wert dieses Faktors im allgemeinen um so kleiner wird, je mehr überbrückte T-Glieder zur Realisierung der gegebenen Übertragungsfunktion in Kette geschaltet werden, ist es wünschenswert, wenigstens hinreichende Realisierungsbedingungen für Übertragungsfunktionen von höherem als dem zweiten Grad angeben zu können. Derartige Bedingungen, die im Einzelfall in ähnlich einfacher Weise nachgeprüft werden können wie die Bedingungen von Abschnitt 3.4.3.1 für Funktionen zweiten Grades, lassen sich für einen praktisch wichtigen Sonderfall ableiten, der im folgenden Abschnitt 4.2 behandelt wird. Dort wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich die normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k H_F(p)} - 1, \quad (4.1)$$

die gemäß Gl.(2.3) der Übertragungsfunktion

$$k H_F(p) = k \frac{1}{b_0 p + 1} \prod_{\mu=1}^m \frac{p + a_{\mu}}{p + b_{\mu}} \prod_{v=1}^n \frac{p^2 + c_{1v} p + c_{0v}}{p^2 + d_{1v} p + d_{0v}} \quad (4.2)$$

$$(b_0 \geq 0; a_{\mu} \geq 0, b_{\mu} > 0, \mu=1, 2, \dots, m; c_{1v} \geq 0, c_{0v}, d_{0v}, d_{1v} > 0, v=1, 2, \dots, n)$$

zugeordnet ist, durch eine **R e i h e n s c h a l t u n g** von kanonischen und Übertragerfreien Zweipolen mit je einem oder zwei Energiespeichern realisieren läßt.

Die Überprüfung, ob und für welche Werte von k die Impedanz $z(p)$ durch eine **P a r a l l e l s c h a l t u n g** von kanonischen und Übertragerfreien Zweipolen mit je einem oder zwei Energiespeichern verwirklicht werden kann, ist nur mit erheblichem numerischem Aufwand möglich. Dies wird im Abschnitt 4.3 erläutert.

Im übrigen besteht natürlich auch die Möglichkeit, das Verfahren von BRUNE [8] und dessen Varianten [9] zur Realisierung von $z(p)$ heranzuziehen, die bei Funktionen höheren Grades eine ganze Reihe von Lösungsverzweigungen bieten. Hierunter können sich unter Umständen auch Übertragerfreie Lösungen befinden. Allerdings ist dieses Vorgehen mit erheblichem Rechenaufwand verbunden, wenn es für eine größere Anzahl von k -Werten durchgeführt wird. Auch ist es vom theoretischen Standpunkt aus unbefriedigend, da abgesehen von Einzelfällen keine definitive Aussage darüber gemacht werden kann, ob sich zu einer gegebenen Funktion $H_F(p)$ ein konstanter Faktor k angeben läßt, für den die durch Gl.(4.1) definierte normierte Impedanz Übertragerfrei nach BRUNE realisierbar ist.

4.2. Die Realisierungsbedingungen für Reihenschaltungen von Zweipolen mit jeweils höchstens zwei Energiespeichern

Aus den Gln.(4.1) und (4.2) folgt für die normierte Impedanz

$$z(p) = \frac{1}{k} (b_0 p + 1) \prod_{\mu=1}^m \frac{p + b_{\mu}}{p + a_{\mu}} \prod_{v=1}^n \frac{p^2 + d_{1v} p + d_{0v}}{p^2 + c_{1v} p + c_{0v}} - 1.$$

Damit $z(p)$ für hinreichend klein gewähltes k eine Zweipolfunktion sein kann, muß $H_F(p)$ die Bedingungen von Satz 1b er-

füllen. Daraus folgt unter anderem, daß höchstens einer der Koeffizienten a_μ ($\mu=1,2,\dots,m$) den Wert Null haben darf und daß die Absolutkoeffizienten c_{0v} ($v=1,2,\dots,n$) aller Polynome mit $c_{1v}=0$ voneinander verschieden sein müssen. Weiterhin dürfen wegen der Forderung, daß $z(p)$ als Summe von Zweipolefunktionen ersten und zweiten Grades darstellbar sein soll, die reellen Nullstellen von $H_F(p)$ höchstens mit der Vielfachheit Zwei auftreten und die komplexen Nullstellen müssen einfach sein.

Falls sämtliche Nullstellen von $H_F(p)$ einfach sind, kann $z(p)$ in der Form

$$z(p) = \frac{1}{k} \left[b_0 p + \sum_{\mu=1}^{m'} \frac{\beta_\mu}{p + a_\mu} + \sum_{v=1}^{n'} \frac{\delta_{1v} p + \delta_{0v}}{p^2 + c_{1v} p + c_{0v}} + \lambda \right] - 1 \quad (4.3)$$

mit $m'=m$ und $n'=n$ geschrieben werden. Treten reelle Doppelnullstellen in $H_F(p)$ auf, so vermindert sich die Zahl der Summanden unter dem ersten Summenzeichen von Gl.(4.3) entsprechend. Stattdessen treten Summanden der Form

$$\frac{\beta_\mu}{p + a_\mu} + \frac{\gamma_\mu}{(p + a_\mu)^2} = \frac{\beta_\mu p + (a_\mu \beta_\mu + \gamma_\mu)}{p^2 + 2a_\mu p + a_\mu^2}$$

in Gl.(4.3) auf, die im folgenden wie die Summanden der zweiten Teilsumme von Gl.(4.3) behandelt werden können.

a) Summanden ersten Grades:

Teilfunktionen der Form

$$z_{r\mu}(p) = \frac{\beta_\mu}{p + a_\mu} \quad (\mu=1,2,\dots,m')$$

lassen sich unmittelbar realisieren, falls $\beta_\mu > 0$ gilt. Ist dagegen $\beta_\mu < 0$, so kann im Fall $a_\mu > 0$, $\lambda > -\beta_\mu/a_\mu$ eine Konstante $r_{r\mu} = -\beta_\mu/a_\mu$ von λ abgespalten werden, die zu $z_{r\mu}(p)$ hinzugeaddiert wird, so daß

$$z_{r\mu}(p) + r_{r\mu} = - \frac{\frac{\beta_{\mu}}{a_{\mu}} p}{p + a_{\mu}}$$

eine Zweipolfunktion ist. Für $a_{\mu}=0$ und $\beta_{\mu}<0$ kann dieses Verfahren nicht angewendet werden. Die Funktion $z(p)$ ist in diesem Fall keine Zweipolfunktion.

Treten in der ersten Teilsumme von Gl.(4.3) mehrere Partialbrüche mit teils positivem, teils negativem Entwicklungskoeffizienten auf, so empfiehlt es sich, je einen Partialbruch mit positivem und einen Partialbruch mit negativem Entwicklungskoeffizienten zu einer Funktion zweiten Grades zusammenzufassen. Behandelt man diese auf die im nachfolgenden Unterabschnitt b beschriebene Weise, so kann in günstig gelagerten Fällen eine Verkleinerung der Konstante λ zugunsten des Partialbruchs mit negativem Entwicklungskoeffizienten vermieden werden.

b) Summanden zweiten Grades:

Teilfunktionen der Form

$$z_{kv}(p) = \frac{\delta_{1v}p + \delta_{0v}}{p^2 + c_{1v}p + c_{0v}} \quad (v=1,2,\dots,n')$$

können kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden, falls

$$\delta_{0v} \geq 0 \quad \text{und} \quad c_{1v}\delta_{1v} \geq \delta_{0v}$$

gilt. Ist eine dieser Bedingungen verletzt, dann kann $z_{kv}(p)$ keine Zweipolfunktion sein. Es muß dann untersucht werden, ob durch eine positive Konstante r_{kv} , die von λ abgespalten und zu $z_{kv}(p)$ hinzuaddiert werden muß, eine kanonische und übertragerfreie Realisierung von $z_{kv}(p) + r_{kv}$ ermöglicht wird.

Wendet man die aus Satz 2 abgeleiteten Realisierungsbedingungen auf die Funktion

$$z_{kv}(p) + r_{kv} = \frac{r_{kv}p^2 + (r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v})p + (r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v})}{p^2 + c_{1v}p + c_{0v}} \quad (4.4)$$

an, so ergibt sich, daß im Fall $\delta_{0v} \leq 0$ genau dann eine kanonische und Übertragerfreie Realisierung nach BRUNE möglich ist, wenn

$$r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v} \geq 0 \quad \text{und} \quad r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v} \geq 0$$

gilt und wenn mindestens eine der beiden Bedingungen

$$r_{kv}(c_{1v}\delta_{1v} - \delta_{0v}) + \delta_{1v}^2 \leq 0, \quad$$

$$c_{1v}(c_{1v}\delta_{0v} - c_{0v}\delta_{1v}) - c_{0v}\delta_{0v} \leq 0$$

erfüllt ist.

Für den Fall, daß keine der beiden letztgenannten Bedingungen erfüllt werden kann, ist gemäß Satz 3 eine Realisierung nach FOSTER und LADENHEIM für $\delta_{0v} < 0$ möglich, wenn

$$r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v} > 0, \quad (4.5a)$$

$$r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v} > 0, \quad (4.5b)$$

$$\delta_{0v}^2 + \delta_{1v}(c_{0v}\delta_{1v} - c_{1v}\delta_{0v}) > 0, \quad (4.6)$$

$$\delta_{0v}(2r_{kv}c_{0v} + 3\delta_{0v}) + \delta_{1v}(c_{0v}\delta_{1v} - c_{1v}\delta_{0v}) < 0$$

und

$$\begin{aligned} &\delta_{0v}(8r_{kv}c_{0v} + 9\delta_{0v}) + \delta_{1v}(c_{0v}\delta_{1v} - c_{1v}\delta_{0v}) + \\ &+ 4c_{1v}(r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v})(r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v}) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt.

Die entsprechenden Realisierungsbedingungen für $\delta_{0v} \geq 0$ erhält man, wenn man die Aussagen der Sätze 2 und 3 auf die Funktion $1/[z_{kv}(p) + r_{kv}]$ anwendet. Danach ist es möglich, diese Funktion kanonisch und Übertragerfrei nach BRUNE zu verwirklichen, wenn

$$r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v} \geq 0, \quad r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v} \geq 0$$

und

$$\delta_{0v}(r_{kv}c_{0v} + \delta_{0v}) + (r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v})(c_{0v}\delta_{1v} - c_{1v}\delta_{0v}) \leq 0$$

ist. Kann die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt werden, so ist eine Realisierung von $z_{kv}(p) + r_{kv}$ im Falle $\delta_{0v} > 0$ möglich, wenn die Bedingungen (4.5a,b) und (4.6) für einen positiven Wert $r_{kv} < \lambda$ befriedigt werden können und wenn gleichzeitig

$$\begin{aligned} \delta_{0v}(\delta_{0v} - 2r_{kv}c_{0v}) - \delta_{1v}(c_{1v}\delta_{0v} - c_{0v}\delta_{1v}) &< 0, \\ \delta_{0v}(\delta_{0v} - 8r_{kv}c_{0v}) - \delta_{1v}(c_{1v}\delta_{0v} - c_{0v}\delta_{1v}) + \\ &+ 4c_{1v}c_{0v}r_{kv}(r_{kv}c_{1v} + \delta_{1v}) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt.

Sofern die Funktionen

$$z_{r\mu}(p) + r_{r\mu} \quad \text{mit} \quad r_{r\mu} \geq 0 \quad (\mu=1,2,\dots,m')$$

und

$$z_{kv}(p) + r_{kv} \quad \text{mit} \quad r_{kv} \geq 0 \quad (v=1,2,\dots,n')$$

kanonisch und Übertragerfrei realisierbare Zweipolfunktionen sind und

$$\lambda > \sum_{\mu=1}^{m'} r_{r\mu} + \sum_{v=1}^{n'} r_{kv}$$

ist, kann $H_F(p)$ in der gewünschten Weise bis auf einen konstanten Faktor k mit

$$0 < k \leq \lambda - \sum_{\mu=1}^{m'} r_{r\mu} - \sum_{v=1}^{n'} r_{kv}$$

durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied realisiert werden.

4.3. Die Realisierungsbedingungen für Parallelschaltungen von Zweipolen mit jeweils höchstens zwei Energiespeichern

Im Gegensatz zu den Polen der Impedanz $z(p)$, die durch Gl.(4.1) in Verbindung mit Gl.(4.2) gegeben ist, hängen die Nullstellen von $z(p)$ von der Konstante k ab. Aus diesem Grund ist die Überprüfung, ob $z(p)$ für irgendeinen Wert k durch eine Parallelschaltung von kanonischen und übertragerfreien Zweipolen mit jeweils höchstens zwei Energiespeichern realisiert werden kann, erheblich aufwendiger als bei der im Abschnitt 4.2 behandelten Netzwerkstruktur.

Bei der praktischen Durchführung dieser Prüfung ist es zweckmäßig, zunächst einmal festzustellen, ob die gegebene Übertragungsfunktion $H_F(p)$ den Bedingungen von Satz 1b genügt und wo gegebenenfalls die obere Grenze des Intervalls liegt, in dem sich k bewegen darf, damit die Positivität von $z(p)$ gesichert ist.

Nach der Bestimmung dieses Intervalls kann man k von dem ermittelten Maximalwert ausgehend schrittweise verkleinern und untersuchen, ob $z(p)$ durch eine Parallelschaltung von Zweipolen mit maximal zwei Energiespeichern verwirklicht werden kann. Hierzu hat man für jeden einzelnen k -Wert die Nullstellen von $z(p)$ zu ermitteln und die Funktion $1/z(p)$ in eine Summe von Partialbrüchen und einen konstanten Summanden aufzuspalten. Die weitere Behandlung dieser Partialbrüche erfolgt wie in Abschnitt 4.2 beschrieben. Sofern sämtliche Teilfunktionen kanonisch und übertragerfrei verwirklicht werden können und der konstante Summand, der gegebenenfalls zugunsten einzelner Teilfunktionen von $1/z(p)$ verkleinert werden muß, einen nicht-negativen Wert besitzt, läßt sich $z(p)$ in der gewünschten Weise realisieren.

Da auch hier, ähnlich wie bei der Anwendung des BRUNE-Verfahrens keine definitive Aussage über die Existenz bzw. Nichtexistenz einer Lösung der gewünschten Form gemacht werden kann, ist das geschilderte Verfahren vom theoretischen Standpunkt aus ebenfalls wenig befriedigend und in seiner praktischen Brauchbarkeit begrenzt.

5. ÜBERBRÜCKTE T-NETZWERKE MIT ÜBERTRAGUNGSNULLSTELLEN IN DER RECHTEN FREQUENZHALBE EBENE

Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich durch Netzwerke mit der im Bild 2.2 gezeigten Struktur und frequenzabhängigen passiven Impedanzen $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_3(p)$ Übertragungsfunktionen realisieren, deren Nullstellen in der rechten Frequenzhalbebene liegen. Bekannte Beispiele hierfür sind Allpaß-Netzwerke in überbrückter T-Ausführung, mit denen Funktionen der Form

$$H(p) = \frac{p^2 - b_1 p + b_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (b_0, b_1 > 0)$$

verwirklicht werden können, wenn deren Koeffizienten die Bedingung $b_1^2 \leq b_0$ erfüllen ([11], [13]). Daß diese Bedingung notwendig und hinreichend für die Existenz einer derartigen Realisierung von $H(p)$ ist, kann leicht gezeigt werden, wenn man zunächst aufgrund der Gln.(2.1a,b) die normierten Impedanzen des zugehörigen Kreuzglieds ermittelt:

$$\frac{W_2(p)}{R} = \frac{R}{W_1(p)} = \frac{1 + H(p)}{1 - H(p)} = \frac{p^2 + b_0}{b_1 p}.$$

Wählt man $Z_3(p)/R = \alpha/p$ oder $Z_3(p)/R = \beta p$, dann sind neben $Z_3(p)$ auch die durch Gl.(2.2a) und Gl.(2.2b) definierten Funktionen $Z_1(p)$ bzw. $Z_2(p)$ Zweipolfunktionen, wenn

$$b_1 \leq \alpha \leq \frac{b_0}{b_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b_1}{b_0} \leq \beta \leq \frac{1}{b_1}$$

gilt. In beiden Fällen muß also $b_1^2 \leq b_0$ gefordert werden, damit wenigstens ein positiver Wert für α oder β existiert, für den $H(p)$ durch ein überbrücktes T-Glied realisiert werden kann.

Es liegt nahe, die hier an einem Sonderfall durchgeführten Überlegungen auf allgemeinere Übertragungsfunktionen auszuweiten. Für den Fall

$$H(p) = \frac{p^2 + a_1 p + b_0}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad (b_0, b_1 > 0; a_1 \text{ reell})$$

lassen sich die Bedingungen, denen die Koeffizienten b_0, b_1, a_1 genügen müssen, damit $H(p)$ durch ein allgemeines Überbrücktes T-Netzwerk mit frequenzabhängigen Impedanzen $Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p)$ verwirklicht werden kann, ebenfalls in geschlossener Form angeben. Aufgrund der Gln.(2.1a,b) erhält man zunächst

$$\frac{W_2(p)}{R} = \frac{R}{W_1(p)} = \frac{2p^2 + (b_1 + a_1)p + 2b_0}{(b_1 - a_1)p}.$$

Für $-b_1 \leq a_1 < b_1$ ist $W_2(p)/R$ eine Zweipolfunktion. Wählt man beispielsweise $Z_3(p)/R = \alpha/p$, dann sind $Z_1(p), Z_2(p)$ und $Z_3(p)$ kanonisch und Übertragerfrei realisierbare Zweipolfunktionen, wenn

$$\frac{b_1 - a_1}{2} \leq \alpha \leq \frac{2b_0}{b_1 - a_1}$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{(b_1 - a_1)^2}{4b_0} \leq 1$$

und wegen $b_0 > 0, b_1 > 0, -b_1 \leq a_1 < b_1$ schließlich

$$\frac{b_1 - a_1}{2\sqrt{b_0}} \leq 1. \quad (5.1)$$

Von Interesse ist hier lediglich der Fall $a_1 < 0$, da die Realisierung von $H(p)$ für $a_1 \geq 0$ bereits im Kapitel 3 behandelt wurde. Aus der Beziehung (5.1) folgt unmittelbar, daß $H(p)$ im Fall $a_1 < 0$ keine reellen Nullstellen und Pole haben kann. Die Ungleichung (5.1) läßt sich infolgedessen nach Einführung des Nullstellenwinkels ϕ_N und des Polwinkels ϕ_P (Bild 5.1) in eine etwas anschaulichere Form bringen, wenn

man beachtet, daß $\cos \phi_N = -a_1 / (2\sqrt{b_0})$ und $\cos \phi_P = -b_1 / (2\sqrt{b_0})$ ist. Man erhält dann die Realisierungsbedingung

$$\cos \phi_N - \cos \phi_P \leq 1, \quad (5.2)$$

wobei wegen $-a_1 \leq b_1$ stets $\cos \phi_N \leq -\cos \phi_P$, d.h. $\phi_N \geq \pi - \phi_P$ gelten muß.

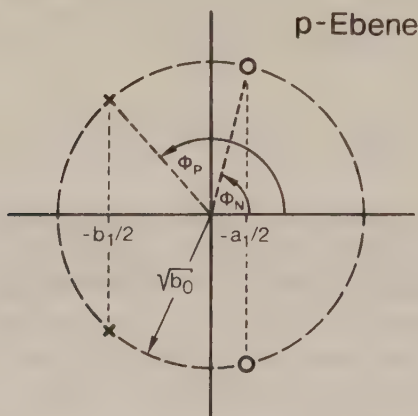


Bild 5.1: Zur Definition des Nullstellenwinkels ϕ_N und des Polwinkels ϕ_P

Der kleinste erreichbare Nullstellenwinkel ist $\phi_N = \pi/3$. In diesem Fall kann die Bedingung (5.2) nur erfüllt werden, wenn $\phi_P = 2\pi/3$ gewählt wird. Damit liegt gerade der zuvor behandelte Grenzfall $-a_1 = b_1 = \sqrt{b_0}$ für Allpaßrealisierungen durch überbrückte T-Netzwerke vor.

Führt man die entsprechenden Überlegungen für den Ansatz $Z_3(p)/R = \beta p$ durch, so ergeben sich die gleichen Realisierungsbedingungen (5.1) und (5.2) für die Koeffizienten bzw. die Nullstellen- und Polwinkel von $H(p)$.

Gegenüber reinen Allpässen bietet die soeben beschriebene Netzwerkvariante den Vorteil, daß bei der Realisierung einer Übertragungsfunktion mit Nullstellen in der rechten Frequenzhalbebene die Nullstellenverteilung des Mindestphasenanteils

nicht starr festgelegt ist, sondern bis zu einem gewissen Grad beeinflußt werden kann. Dadurch läßt sich unter Umständen eine Pol-Nullstellen-Konfiguration des Mindestphasenanteils erreichen, die mit geringerem Aufwand an Energiespeichern oder wenigstens bis auf einen näher an Eins gelegenen konstanten Faktor realisiert werden kann, als dies bei der Verwendung reiner Allpässe möglich wäre.

Übertragungsfunktionen mit Nullstellen in der rechten Frequenzhalbebene und Nullstellenwinkeln, die unterhalb von $\pi/3$ liegen, lassen sich in bekannter Weise ([11]) unter Verwendung von Allpässen realisieren, die entweder Übertragerbehaftet sind oder einen erheblichen Mehraufwand an Energiespeichern erfordern.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit allgemeiner rationaler Übertragungsfunktionen zweiten Grades durch überbrückte T-Netzwerke, deren Impedanzen $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_3(p)$ sich mit RLC-Zweipolen verwirklichen lassen, werden hier nicht im einzelnen diskutiert. Folgende grundsätzliche Aussagen können jedoch gemacht werden:

1. Durch überbrückte T-Netzwerke, bei denen die Impedanz $Z_3(p)$ einen konstanten positiven Wert besitzt, lassen sich nur Übertragungsfunktionen $H(p)$ mit Nullstellen in der abgeschlossenen linken Frequenzhalbebene realisieren. Die aus $H(p)$ gemäß Gl.(2.1b) abgeleitete Funktion $W_2(p)/R$ muß nämlich die Bedingung $\operatorname{Re}[W_2(p)/R] > 1$ für $\operatorname{Re}[p] > 0$ erfüllen, damit eine Zerlegung von $W_2(p)$ nach Gl.(2.2a) und (2.2b) mit $Z_3(p) = \text{const} > 0$ und positiven Funktionen $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ möglich ist. Aus diesem Grund kann die Funktion

$$H(p) = \frac{W_2(p)/R - 1}{W_2(p)/R + 1}$$

für $\operatorname{Re}[p] > 0$ nicht verschwinden.

2. Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Übertragungsfunktion $H(p)$ zweiten Grades durch ein überbrücktes T-Netz-

werk mit frequenzabhängigen, durch RLC-Zweipole realisierbaren Impedanzen $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_3(p)$ verwirklicht werden kann, besteht darin, daß die aus $H(p)$ gemäß Gl.(2.1b) abgeleitete Funktion $W_2(p)/R$ in einer der beiden Formen

$$\frac{W_2(p)}{R} = \frac{c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{p + p_1}, \quad \frac{W_2(p)}{R} = \frac{c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{(p + p_1)(p + p_2)}$$

$$(c_1, p_1 \geq 0; c_0, c_2, p_2 > 0)$$

dargestellt werden kann. Im ersten Fall führen unter Umständen die Ansätze

$$\frac{Z_3(p)}{R} = \frac{\alpha}{p + p_1} \quad \text{oder} \quad \frac{Z_3(p)}{R} = \beta (p + p_1),$$

im zweiten Fall die Ansätze

$$\frac{Z_3(p)}{R} = \alpha \frac{p + p_2}{p + p_1} \quad \text{oder} \quad \frac{Z_3(p)}{R} = \beta \frac{p + p_1}{p + p_2}$$

zum Ziel.

6. MÖGLICHKEITEN ZUR EINSPARUNG VON ENERGIESPEICHERN

6.1. Das Verfahren von E.C. HO

Verzichtet man bei der Realisierung von reellen, rationalen, längs der imaginären Achse der p -Ebene einschließlich des Punktes $p = \infty$ polfreien Mindestphasen-Übertragungsfunktionen auf die bisher erhobene Forderung nach symmetrischen Zweitoren mit konstanter Eingangsimpedanz, so lassen sich gegenüber den im Kapitel 3 erarbeiteten Lösungen Energiespeicher einsparen. Eine Möglichkeit hierzu bietet das Verfahren von E.C. HO [16], mit dem jede derartige Übertragungsfunktion bis auf einen konstanten Faktor K als Spannungsverhältnis U_2/U_1 eines Netzwerks der im Bild 6.1 gezeigten Struktur realisiert werden kann.

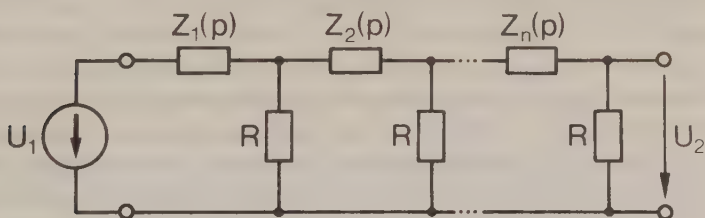


Bild 6.1: Eine mögliche Netzwerkstruktur nach E.C. HO

Die frequenzabhängigen Impedanzen dieses Netzwerks ergeben sich aufgrund der Beziehungen

$$Z_1(p) = R \left[\frac{1}{k_1 H_1(p)} - 1 \right], \quad (6.1a)$$

$$Z_v(p) = R \left[\frac{1}{k_v H_v(p)} - 2 + k_{v-1} H_{v-1}(p) \right] \quad (v=2,3,\dots,n) \quad (6.1b)$$

aus den reellen Faktoren der Funktion

$$H(p) = H_1(p) H_2(p) \dots H_n(p).$$

Sofern die Teilfunktionen $H_v(p)$ ($v=1,2,\dots,n$) den Bedingungen von Satz 1b genügen, lassen sich die Funktionen $Z_v(p)$ für hinreichend kleine Werte k_v realisieren. Andernfalls muß $H(p)$ durch Erweiterung mit geeignet zu wählenden Hilfspolynomen in eine realisierbare Form gebracht werden.

Eine Übertragerfreie Realisierung von $KH(p)$ erreicht man, wenn man $H(p)$ in ein Produkt von Teilfunktionen zerlegt, die höchstens den Grad Zwei besitzen, und wenn man die im Kapitel 3 abgeleiteten Aussagen beachtet. Die Realisierungsbedingungen für die durch Gl.(6.1a) gegebene Impedanz $Z_1(p)$ stimmen nämlich mit den Realisierungsbedingungen für die Impedanzen von Überbrückten T-Gliedern völlig überein. Bei den durch Gl.(6.1b) definierten Impedanzen $Z_v(p)$ ($v=2,3,\dots,n$) reicht für die Übertragerfreie Realisierbarkeit ein Wert k_v aus, der gerade halb so groß ist wie der entsprechende Wert k'_v bei der Realisierung von $k'_v H_v(p)$ durch ein Übertragerfreies überbrücktes T-Glied. Der Wert k_v kann größer als $k'_v/2$ gewählt werden, wenn die Zweipolfunktion $k_{v-1} H_{v-1}(p)$ in die Summe aus einer positiven Konstante r_{v-1} und einer kanonisch und Übertragerfrei realisierbaren Restzweipolfunktion zerlegt werden kann. Diese Konstante r_{v-1} läßt sich zur teilweisen Kompensation des negativen Summanden in Gl.(6.1b) verwenden, und man erhält eine Übertragerfrei realisierbare Impedanz $Z_v(p)$, wenn

$$k_v = \frac{k'_v}{2 - r_{v-1}}$$

gewählt wird.

Ob bei der Realisierung von $H(p)$ derartige Summanden r_{v-1} von den zugehörigen Zweipolfunktionen $k_{v-1} H_{v-1}(p)$ abgespalten werden können, hängt unter anderem auch von der Reihenfolge ab, in der die Teilfunktionen von $H(p)$ in den Realisierungsprozeß einbezogen werden. Um das Netzwerk zu ermitteln, das die Übertragungsfunktion $H(p)$ bis auf den größtmöglichen Faktor K nach E.C. HO verwirklicht, genügt es daher nicht, wie im Fall der Realisierung durch Überbrückte T-Glieder die optimale gegen-

seitige Zuordnung der Nullstellen und Pole von $H(p)$ zu bestimmen. Man muß darüber hinaus auch für jede der möglichen Zuordnungen die Reihenfolge der Teilfunktionen $H_v(p)$ ($v=1,2,\dots,n$) permutieren.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine zweite Realisierung nach E.C. HO erwähnt, die sich dadurch ergibt, daß man zu dem im Bild 6.1 dargestellten Zweitor das duale umgekehrte Zweitor ermittelt. Bei diesem sind also die Längsimpedanzen reine Ohm-widerstände und die Querimpedanzen frequenzabhängig. Die Realisierungsbedingungen sind die gleichen wie bei der Struktur von Bild 6.1.

Gegenüber der Realisierung durch überbrückte T-Glieder spart man beim Verfahren nach E.C. HO maximal zwei Energiespeicher, wenn man sich bei der Zerlegung von $H(p)$ auf Teilübertragungsfunktionen ersten und zweiten Grades beschränkt und wenn keine Erweiterung notwendig ist. Kann $H(p)$ dagegen nur nach Erweiterung mit zulässig gewählten Hilfspolynomen in ein Produkt von Funktionen zerlegt werden, die alle den Bedingungen von Satz 1b genügen, dann sind gegenüber der Realisierung durch überbrückte T-Glieder zusätzliche Einsparungen möglich. In Gl.(6.1b) lassen sich nämlich die beiden frequenzabhängigen Summanden zu einer Zweipolfunktion zweiten Grades zusammenfassen, wenn die Nullstellen von $H_v(p)$ und die Pole von $H_{v-1}(p)$ identisch sind. Dies läßt sich in allen Fällen erreichen, in denen $H_{v-1}(p)$ und $H_v(p)$ aus einer Teilübertragungsfunktion zweiten Grades hervorgehen, die nicht den Bedingungen von Satz 1b genügt, sofern man dafür sorgt, daß das Erweiterungspolynom im Zähler von $H_v(p)$ und im Nenner von $H_{v-1}(p)$ auftritt.

Der entscheidende Nachteil dieses Realisierungsverfahrens ist darin zu sehen, daß der konstante Faktor K , um den sich sinnvoll vorgeschriebene Übertragungsfunktionen von den nach E.C. HO verwirklichten unterscheiden, in vielen Fällen sehr klein ist. Das gilt insbesondere bei Übertragungsfunktionen mit hohem Grad. Durch diese Tatsache wird die praktische Verwendbarkeit des Verfahrens stark eingeschränkt.

6.2. Eine weitere Möglichkeit zur Einsparung von Energiespeichern

6.2.1. Der Grundgedanke

Die folgenden Überlegungen gehen von Mindestphasen-Übertragungsfunktionen zweiten Grades aus, die auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene einschließlich des Punktes Unendlich polfrei sind und weder unmittelbar noch bis auf einen konstanten Faktor durch ein überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern oder zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder mit je zwei Energiespeichern Übertragerfrei realisiert werden können. Gemäß Abschnitt 3.3 läßt sich jede derartige Übertragungsfunktion $H(p)=a(p)/b(p)$ nach Erweiterung mit einem geeignet zu wählenden Polynom $e(p)$ von höchstens zweitem Grad als Produkt zweier Übertragungsfunktionen $H_1(p)$ und $H_2(p)$ darstellen, die beide abgesehen von einem konstanten Faktor k_1 bzw. k_2 durch je ein überbrücktes T-Glied mit kanonisch und Übertragerfrei realisierbaren Impedanzen verwirklicht werden können.

Falls sich das Zählerpolynom von $H(p)$ in Form zweier reeller Faktoren $a_1(p)$ und $a_2(p)$ von höchstens erstem Grad schreiben läßt, wird die Zuordnung

$$H_1(p) = \frac{a_1(p) e(p)}{b(p)}, \quad H_2(p) = \frac{a_2(p)}{e(p)} \quad (6.2)$$

mit $e(p) = p + x$ ($x > 0$) getroffen. Bei Übertragungsfunktionen mit zwei reellen, durch die Faktoren $b_1(p)$ und $b_2(p)$ repräsentierten Polen wird

$$H_1(p) = \frac{e(p)}{b_1(p)}, \quad H_2(p) = \frac{a(p)}{b_2(p) e(p)} \quad (6.3)$$

mit $e(p) = p + x$ ($x > 0$) gewählt, und in allen übrigen Fällen sind die beiden Teilübertragungsfunktionen $H_1(p)$ und $H_2(p)$ durch die Beziehungen

$$H_1(p) = \frac{e(p)}{b(p)}, \quad H_2(p) = \frac{a(p)}{e(p)} \quad (6.4)$$

mit $e(p) = p^2 + yp + x$ ($x, y > 0$) gegeben. Nach geeigneter Wahl von x bzw. x und y sowie k_1 und k_2 erhält man zwei Übertragerfreie Überbrückte T-Glieder mit den Übertragungsfunktionen $k_1 H_1(p)$ und $k_2 H_2(p)$, die gemäß Bild 6.2 in der genannten Reihenfolge hintereinander angeordnet werden.

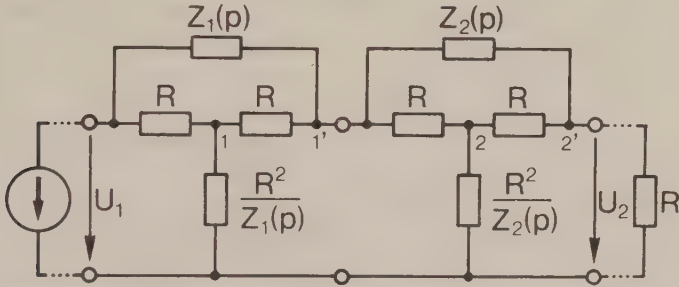


Bild 6.2: Zwei in Kette geschaltete Überbrückte T-Glieder

Nun wird der stromlose ohmsche Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 1' herausgetrennt, die potentialgleichen Knoten 2 und 2' werden durch einen Kurzschluß verbunden. Durch diese Maßnahme geht zwar die Symmetrie der einzelnen Zweitore verloren, das Spannungsverhältnis U_2/U_1 ändert sich jedoch nicht. Faßt man die in Reihe bzw. parallel liegenden Zweipole von Bild 6.2 zusammen, so ergibt sich das im Bild 6.3 dargestellte Π -Glied.

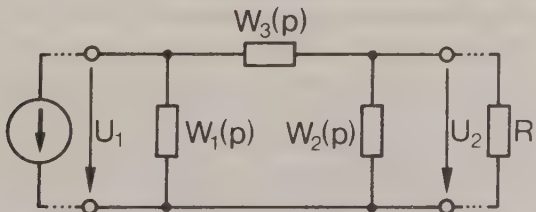


Bild 6.3: Äquivalentes Π -Glied zu dem im Bild 6.2 dargestellten Netzwerk

Wegen

$$\frac{z_1(p)}{R} = \frac{1}{k_1 H_1(p)} - 1, \quad \frac{z_2(p)}{R} = \frac{1}{k_2 H_2(p)} - 1$$

und

$$w_1(p) = \frac{w_1(p)}{R} = 1 + \frac{R}{z_1(p)},$$

$$w_2(p) = \frac{w_2(p)}{R} = \frac{R}{z_2(p)},$$

$$w_3(p) = \frac{w_3(p)}{R} = \frac{z_1(p)}{R} + \frac{\frac{z_2(p)}{R}}{\frac{z_2(p)}{R} + 1}$$

folgen aus den Gln.(6.2) für den Fall, daß sich das Zählerpolynom von $H(p)$ in Form zweier reeller Faktoren von höchstens erstem Grad darstellen läßt, die Beziehungen

$$w_1(p) = \frac{b(p)}{b(p) - k_1 a_1(p)e(p)}, \quad (6.5a)$$

$$w_2(p) = \frac{a_2(p)}{\frac{1}{k_2}e(p) - a_2(p)}, \quad (6.5b)$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1}b(p) - k_2 a_1(p)a_2(p)}{a_1(p)e(p)}. \quad (6.5c)$$

Im Fall reeller Pole von $H(p)$ erhält man mit den Gln.(6.3)

$$w_1(p) = \frac{b_1(p)}{b_1(p) - k_1 e(p)}, \quad (6.6a)$$

$$w_2(p) = \frac{a(p)}{\frac{1}{k_2}b_2(p)e(p) - a(p)} , \quad (6.6b)$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1}b_1(p)b_2(p) - k_2a(p)}{b_2(p)e(p)} . \quad (6.6c)$$

Sind die Nullstellen und Pole von $H(p)$ komplexe Größen mit nicht-verschwindendem Imaginärteil, so ergibt sich mit den Gln.(6.4)

$$w_1(p) = \frac{b(p)}{b(p) - k_1e(p)} , \quad (6.7a)$$

$$w_2(p) = \frac{a(p)}{\frac{1}{k_2}e(p) - a(p)} , \quad (6.7b)$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1}b(p) - k_2a(p)}{e(p)} . \quad (6.7c)$$

Da $Z_1(p)$ und $Z_2(p)$ kanonisch und Übertragerfrei realisierbare Zweipolfunktionen sind, muß dies für die Funktionen $w_1(p)$ und $w_2(p)$ offensichtlich auch gelten. Über die Funktion $w_3(p)$ läßt sich lediglich aussagen, daß sie als Summe zweier Zweipolfunktionen ebenfalls eine Zweipolfunktion sein muß und daß sie außerdem vom Grad Zwei ist, da ihre beiden Summanden stets als Quotienten zweier Polynome zweiten Grades so dargestellt werden können, daß beide Nennerpolynome identisch sind. Dadurch kann gegenüber der Realisierung durch überbrückte T-Glieder ein Energiespeicher eingespart werden, wenn das Erweiterungspolynom $e(p)$ vom Grad Eins ist. Bei Erweiterungspolynomen zweiten Grades beträgt die Einsparung zwei Energiespeicher. Wie noch gezeigt wird, lassen sich in jedem Fall Erweiterungspolynome $e(p)$ angeben, für die bei entsprechend gewählten Werten der Konstanten k_1 und k_2 alle drei Funktionen $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ kanonisch und Übertragerfrei realisiert werden

können.

Stellt man im Netzwerk von Bild 6.2 zwischen den Knoten 1 und 1' eine Kurzschlußverbindung her und trennt den Widerstand zwischen den Knoten 2 und 2' heraus, so erhält man ein T-Glied, dessen Elemente bezüglich R dual zu denen von Bild 6.3 sind. Daher kann die folgende Diskussion auf das Π -Glied von Bild 6.3 und die durch die Gln.(6.5a-c),(6.6a-c),(6.7a-c) definierten normierten Impedanzen $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ beschränkt werden.

Da man in allen Fällen, in denen sich $H(p)$ nach Erweiterung mit einem Polynom ersten Grades realisieren läßt, insgesamt fünf Energiespeicher benötigt, wird man im allgemeinen von den beiden Realisierungsmöglichkeiten (Π -Glied oder T-Glied) diejenige auswählen, welche die geringere Zahl von Induktivitäten aufweist. Muß $H(p)$ dagegen mit einem Polynom zweiten Grades erweitert werden, so lassen sich nur in Ausnahmefällen Netzwerke angeben, bei denen die Zahl der Kapazitäten gegenüber der Zahl der Induktivitäten überwiegt.

Im einzelnen werden nun die grundsätzlich möglichen Fälle untersucht, in denen sich eine gegebene Übertragungsfunktion zweiten Grades nicht durch ein einzelnes überbrücktes T-Glied mit kanonisch und übertragerfrei realisierbaren Impedanzen verwirklichen läßt. Hierzu werden die bereits bekannten Bedingungen für die kanonische und übertragerfreie Realisierbarkeit von Zweipolfunktionen auf $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ angewandt. Das Hauptgewicht der Untersuchungen liegt dabei auf dem Nachweis, daß in jedem Fall ein Erweiterungspolynom angegeben werden kann, für das bei hinreichend klein gewählten Faktoren k_1 und k_2 eine übertragerfreie Lösung mit minimalem Aufwand an Energiespeichern möglich ist. Da dieser Nachweis geführt werden kann, ohne daß die etwas unhandlichen Realisierungsbedingungen von FOSTER und LADENHEIM herangezogen werden müssen, werden sie im folgenden außer acht gelassen. Bei der praktischen Bestimmung des maximal möglichen Faktors $k=k_1k_2$ und des zugehörigen Erweiterungspolynoms, die am zweckmäßigsten mit Hilfe eines programmgesteuerten Digitalrechners erfolgt, soll-

ten die Aussagen von Satz 3 in jedem Fall berücksichtigt werden.

Es wird sich zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen Realisierungen in Form eines Π -Glieds oder eines T-Glieds möglich sind, die bezüglich des maximal erreichbaren Werts für den konstanten Faktor k günstiger sind als die im Abschnitt 3.3 behandelten Realisierungen durch zwei in Kette geschaltete überbrückte T-Glieder. Der Grund dafür ist, daß die Kettenanordnung zweier überbrückter T-Glieder einem Π -Glied entspricht, dessen normierte Impedanz $w_1(p)$ der Bedingung $\operatorname{Re}[w_1(j\omega)] \geq 1$ für alle ω genügen muß. Dagegen wird bei der Realisierung nach Bild 6.3 lediglich gefordert, daß $w_1(p)$ ebenso wie die beiden anderen normierten Impedanzen $w_2(p)$ und $w_3(p)$ kanonisch und übertragerfrei zu verwirklichen sein muß. Aus diesem Grund sind unter bestimmten Voraussetzungen die Koeffizienten des jeweiligen Erweiterungspolynoms $e(p)$ geringeren Einschränkungen unterworfen als die Koeffizienten des entsprechenden Erweiterungspolynoms bei der Realisierung nach Abschnitt 3.3.

6.2.2. Funktionen mit einer doppelten Nullstelle bei $p=\infty$

Die Übertragungsfunktion

$$H_C(p) = \frac{1}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0)$$

ist in jedem Fall durch ein übertragerfreies Netzwerk nach Bild 6.3 mit fünf Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor $k=k_1 k_2$ realisierbar, der im Intervall $0 < k \leq b_1^2/4$ liegen darf. Für den Fall $b_1^2 \geq 2b_0$ stellt $k=b_0 > b_1^2/4$ die obere Grenze für das zulässige k -Intervall dar.

Zum Nachweis dieser Behauptungen bildet man nach dem Erweitern von $H_C(p)$ mit $e(p)=p+x$ ($x>0$) gemäß den Gln.(6.2) und (6.5a-c) die normierten Impedanzen

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{p^2 + (b_1 - k_1)p + (b_0 - k_1 x)},$$

$$w_2(p) = \frac{1}{\frac{1}{k_2} p + \frac{x}{k_2} - 1},$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1} p^2 + \frac{b_1}{k_1} p + \frac{b_0}{k_1} - k_2}{p + x}.$$

Damit $w_1(p)$ eine frequenzabhängige und nach BRUNE Übertragerfrei realisierbare Impedanz ist, muß neben der Forderung

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[b_1, \frac{b_0}{x} \right] \quad (6.8)$$

gemäß Abschnitt 3.3.1 mindestens eine der beiden Bedingungen

$$-x + b_1 - k_1 \geq 0, \quad (6.9a)$$

$$(b_1^2 - b_0)x - b_0 b_1 \geq 0 \quad (6.9b)$$

erfüllt sein.

Die Funktion $w_2(p)$ ist eine Zweipolfunktion, wenn

$$0 < k_2 \leq x \quad (6.10)$$

gilt.

Da die Koeffizienten der Funktion $w_3(p)$ automatisch nicht-negativ sind, wenn dies für die Koeffizienten von $w_1(p)$ und $w_2(p)$ der Fall ist, muß für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$ nach BRUNE lediglich noch

$$x \leq b_1 \quad (6.11)$$

gefordert werden.

Wegen $b_1^2 < 4b_0$ und $x > 0$ folgt aus der Ungleichung (6.9a)

$$k_1 \leq b_1 - x < \min \left[b_1, \frac{b_0}{x} \right] .$$

Die Funktionen $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ sind also aufgrund der Bedingungen (6.8), (6.9a), (6.10) und (6.11) für positive Werte von x kanonisch und Übertragerfrei realisierbar, wenn

$$x < b_1$$

und

$$0 < k_1 \leq b_1 - x , \quad 0 < k_2 \leq x$$

gilt. Das Produkt $k=k_1k_2$ erreicht sein Maximum bei $x=b_1/2$.

Eine weitere Realisierung von $H_C(p)$ kann für den Fall angegeben werden, daß $b_1^2 \geq 2b_0$ ist. Dann können die Bedingungen (6.9b) und (6.11) im Intervall

$$\frac{b_0 b_1}{b_1^2 - b_0} \leq x \leq b_1$$

gleichzeitig erfüllt werden. Wegen

$$\frac{b_0}{x} \leq \frac{b_1^2 - b_0}{b_1} < b_1$$

folgt aus der Forderung (6.8)

$$0 < k_1 \leq \frac{b_0}{x} .$$

Zusammen mit der Bedingung (6.10) erhält man für $k=k_1k_2$ das maximal mögliche Intervall

$$0 < k \leq b_0 ,$$

wenn x so gewählt wird, daß die Bedingungen (6.9b) und (6.11) gleichzeitig erfüllt werden. Diese Lösung, die nur unter der Voraussetzung $b_1^2 \geq 2b_0$ existiert, ist wegen $b_0 > b_1^2/4$ bezüglich des maximal erreichbaren konstanten Faktors k günstiger als

die zuvor diskutierte, die derjenigen von Abschnitt 3.3.2 entspricht. Damit ist die im Abschnitt 6.2.1 aufgestellte Behauptung nachgewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen eine größere Intervallbreite für k erreicht werden kann als bei der Realisierung durch überbrückte T-Glieder.

6.2.3. Funktionen mit einer einfachen Nullstelle bei $p=\infty$

Die Übertragungsfunktion

$$H_D(p) = \frac{p + a}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0; a \geq b_1)$$

kann in jedem Fall durch ein Übertragerfreies Netzwerk nach Bild 6.3 mit fünf Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor k verwirklicht werden, der im Intervall

$$0 < k \leq \text{Max} \left[\frac{b_1^2}{4a}, \frac{b_0 b_1}{a^2 + b_0} \right]$$

liegt.

Zur Begründung dieser Aussage sind die beiden folgenden Fälle zu untersuchen:

- a) Bei der Bestimmung der Impedanzen $w_1(p)$, $w_2(p)$, $w_3(p)$ gemäß den Gln.(6.2) und (6.5a-c) wird $a_1(p) \equiv 1$, $a_2(p) = p+a$ und $e(p) = p+x$ ($x > 0$) gesetzt. Dann ist

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{p^2 + (b_1 - k_1) p + b_0 - k_1 x},$$

$$w_2(p) = \frac{p + a}{\left[\frac{1}{k_2} - 1 \right] p + \frac{x}{k_2} - a},$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1} p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2 \right] p + \frac{b_0}{k_1} - k_2 a}{p + x}.$$

Die Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_1(p)$ wurden bereits im Abschnitt 6.2.2 diskutiert.

Die Funktion $w_2(p)$ ist für

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{x}{a} \right] \quad (6.12a)$$

eine Zweipolfunktion.

Unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen (6.8) und (6.12a) erfüllt sind, werden die Koeffizienten von $w_3(p)$ nicht negativ, so daß für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$ nach BRUNE lediglich die zusätzliche Bedingung

$$0 < k_1 k_2 \leq b_1 - x \quad (6.13)$$

zu stellen ist.

Aus der Bedingung (6.13) folgt, daß $x < b_1$ gelten muß. Damit vereinfacht sich wegen $a \geq b_1$ die Forderung (6.12a) auf

$$0 < k_2 \leq \frac{x}{a}. \quad (6.12b)$$

Da weiterhin mit der Bedingung (6.9a) auch die Bedingung (6.13) und wegen $b_1^2 < 4b_0$ die Forderung (6.8) erfüllt ist, erhält man eine Übertragerfreie Realisierung von $kH_D(p)$ durch ein Netzwerk nach Bild 6.3, wenn

$$0 < x < b_1$$

und

$$0 < k_1 \leq b_1 - x, \quad 0 < k_2 \leq \frac{x}{a}$$

gewählt wird. Der größtmögliche Wert für den konstanten

Faktor $k=k_1k_2$ ist $k=b_1^2/4a$. Er kann bei $x=b_1/2$ erreicht werden.

Eine weitere Übertragerfreie Realisierung mit fünf Energiespeichern ist möglich, wenn $b_1^2 > 2b_0$ gilt. In diesem Fall kann $w_1(p)$ für

$$\frac{b_0 b_1}{b_1^2 - b_0} \leq x \leq b_1 \quad \text{und} \quad 0 < k_1 \leq \frac{b_0}{x}$$

kanonisch und Übertragerfrei nach BRUNE verwirklicht werden. Das zulässige Intervall für k_2 ist durch die Bedingung (6.12b) gegeben, so daß

$$0 < k_1 k_2 \leq \frac{b_0}{a}$$

sein muß. Andererseits folgt aber aus der Bedingung (6.13) wegen $x \geq b_0 b_1 / (b_1^2 - b_0)$, daß auch

$$0 < k_1 k_2 \leq b_1 \frac{b_1^2 - 2b_0}{b_1^2 - b_0}$$

gelten muß. Sofern es im gesamten Intervall

$$\frac{b_0 b_1}{b_1^2 - b_0} \leq x \leq b_1$$

nicht möglich ist, die Beziehung $b_1 - x \geq b_0/a$ zu erfüllen, dürfen k_1 und k_2 nicht beide gleichzeitig ihren Maximalwert $k_1 = b_0/x$ bzw. $k_2 = x/a$ annehmen, da sonst $w_3(p)$ keine Zweipolfunktion wäre.

- b) Für $a_1(p) = p+a$, $a_2(p) \equiv 1$, $e(p) = p+x$ ($x > 0$) ergibt sich aufgrund der Gln. (6.2) und (6.5a-c)

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{(1 - k_1)p^2 + [b_1 - k_1(a+x)]p + b_0 - k_1 a x},$$

$$w_2(p) = \frac{1}{\frac{1}{k_2}p + \frac{x}{k_2} - 1},$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1}p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2\right]p + \frac{b_0}{k_1} - k_2a}{p^2 + (a+x)p + ax}.$$

Speziell für $x=b_0/a$ erhält man

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1p + b_0}{(1-k_1)p^2 + \left[b_1 - k_1\left[a + \frac{b_0}{a}\right]\right]p + (1-k_1)b_0},$$

$$w_2(p) = \frac{1}{\frac{1}{k_2}p + \frac{1}{k_2}\frac{b_0}{a} - 1},$$

$$w_3(p) = \frac{\frac{1}{k_1}p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2\right]p + \frac{b_0}{k_1} - k_2a}{p^2 + \left[a + \frac{b_0}{a}\right]p + b_0}.$$

Für diesen Sonderfall sind $w_1(p)$ und $w_2(p)$ kanonisch und übertragerfrei nach BRUNE realisierbar, wenn

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1}{a + \frac{b_0}{a}} < 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 < k_2 \leq \frac{b_0}{a}$$

gilt. Dann sind auch die Koeffizienten der zugehörigen Funktion $w_3(p)$ nicht-negativ, und es muß lediglich noch gefordert werden, daß sie mindestens eine der beiden aus Satz 2 abgeleiteten Bedingungen für die kanonische und übertragerfreie Realisierbarkeit nach BRUNE erfüllen. Die erste dieser beiden Bedingungen führt nach kurzer Zwischenrechnung auf die Ungleichung

$$\left[\frac{b_1}{k_1} - 2k_2 \right] \frac{a - b_1}{k_1} + \frac{b_0}{k_1 a} \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2 \right] - k_2^2 \geq 0 .$$

Sie ist für die Maximalwerte $k_1 = b_1 / (a + b_0/a)$, $k_2 = b_0/a$ erfüllt, da ihre linke Seite für diese speziellen Werte gleich

$$a^2 \left[\frac{a}{b_1} - 1 \right] + \frac{a b_0}{b_1} ,$$

d.h. wegen $a \geq b_1$ in jedem Fall positiv ist. Da eine Verkleinerung von k_1 oder k_2 eine Vergrößerung der linken Ungleichungsseite bewirkt, ist für

$$x = \frac{b_0}{a}$$

und

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1}{a + \frac{b_0}{a}} , \quad 0 < k_2 \leq \frac{b_0}{a}$$

stets eine kanonische und Übertragerfreie Realisierung von $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ möglich.

Da im allgemeinen Fall $x \neq b_0/a$ die Konstante $k = k_1 k_2$ den Wert $b_1 x / (a + x)$ nicht übersteigen kann, sind für $x < b_0/a$ sicher keine Realisierungen möglich, bei denen k größer als der für $x = b_0/a$ erreichbare Grenzwert $k = b_0 b_1 / (a^2 + b_0)$ ist. Ob für $x > b_0/a$ günstigere Lösungen existieren, kann im Einzelfall leicht auf numerischem Weg geprüft werden.

6.2.4. Funktionen mit zwei reellen Polen

Aufgrund der Gln.(6.3) und (6.6a-c) erhält man aus der Mindestphasen-Übertragungsfunktion

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p + p_1)(p + p_2)}$$

$$(a_0, a_1 > 0; a_1^2 < 4a_0; p_1, p_2 > 0; p_1 p_2 \neq a_0)$$

unter der Annahme $b_1(p) = p + p_1$, $b_2(p) = p + p_2$, $e(p) = p + x$ ($x > 0$) die normierten Impedanzen

$$w_1(p) = \frac{p + p_1}{(1 - k_1)p + p_1 - k_1 x},$$

$$w_2(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{\left[\frac{1}{k_2} - 1\right] p^2 + \left[\frac{p_2 + x}{k_2} - a_1\right] p + \frac{p_2 x}{k_2} - a_0},$$

$$w_3(p) = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - k_2\right] p^2 + \left[\frac{p_1 + p_2}{k_1} - k_2 a_1\right] p + \frac{p_1 p_2}{k_1} - k_2 a_0}{p^2 + (p_2 + x)p + p_2 x}.$$

Für den Sonderfall $x = a_0/p_2$ lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_1(p)$ und $w_2(p)$

$$0 < k_1 \leq \min \left[1, \frac{p_1 p_2}{a_0} \right], \quad 0 < k_2 \leq 1,$$

wenn man berücksichtigt, daß wegen $a_1^2 < 4a_0$ für beliebige positive p_2 die Relation $p_2 + a_0/p_2 > a_1$ gilt. Damit ist aber auch bereits die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$ gesichert. Für $a_0 > p_1 p_2$ erfüllt $w_3(p)$ nämlich die zweite aus Satz 2 abgeleitete Realisierungsbedingung, da die linke Seite der betreffenden Ungleichung in dem speziellen Fall für beliebige positive k_1 und k_2 den negativen Wert

$$\frac{1}{k_1} (p_1 p_2 - a_0) p_2^2 - k_2 a_0 \left[p_2 + \frac{a_0}{p_2} \right] \left[p_2 + \frac{a_0}{p_2} - a_1 \right]$$

besitzt. Entsprechendes läßt sich auch für $a_0 < p_1 p_2$ zeigen, und da die Koeffizienten von $w_3(p)$ automatisch nicht-negativ sind, wenn dies auch für die Koeffizienten von $w_1(p)$ und $w_2(p)$ gilt, sind sämtliche Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$ nach BRUNE erfüllt.

Für $x \neq a_0/p_2$ wie auch für die zweite Zerlegungsvariante, bei der $b_1(p)=p+p_2$, $b_2(p)=p+p_1$ gewählt wird, läßt sich der zulässige Bereich für $k=k_1 k_2$ prinzipiell nicht erweitern, da mit

$$k = \text{Min} \left[1, \frac{p_1 p_2}{a_0} \right]$$

der Maximalwert erreicht ist, der bei dieser Klasse von Netzwerken überhaupt erreicht werden kann.

6.2.5. Funktionen mit zwei reellen Nullstellen

Eine Mindestphasen-Übertragungsfunktion der Form

$$H_E(p) = \frac{(p+q_1)(p+q_2)}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$(b_0, b_1 > 0; b_1^2 < 4b_0; q_2 \geq q_1 \geq 0; q_1 q_2 \neq b_0),$$

die weder unmittelbar noch bis auf einen konstanten Faktor durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden kann, läßt sich in jedem Fall durch ein Übertragerfreies Netzwerk nach Bild 6.3 mit fünf Energiespeichern bis auf einen konstanten Faktor k realisieren. Eine solche Realisierung ist mit Sicherheit im Fall

$$q_1 q_2 > b_0 \quad \text{für} \quad 0 < k \leq \frac{b_0 b_1}{(b_0 + q_1^2) q_2},$$

im Fall

$$0 < q_1 q_2 < b_0 \quad \text{für} \quad 0 < k \leq \frac{b_1 q_2}{b_0 + q_2^2}$$

und im Fall

$$q_1 q_2 = 0 \quad \text{für} \quad 0 < k \leq \frac{b_1^2}{4 b_0}$$

möglich. Ob diese zulässigen Bereiche nach oben erweitert werden können, muß jeweils von Fall zu Fall geprüft werden.

Um die Existenz einer Übertragerfreien Realisierung von $kH_E(p)$ mit fünf Energiespeichern für die angegebenen k -Intervalle nachzuweisen, hat man zwei Zerlegungsmöglichkeiten zu untersuchen:

a) Für $a_1(p)=p+q_1$, $a_2(p)=p+q_2$, $e(p)=p+x$ ($x>0$) ergeben sich aufgrund der Gln.(6.2) und (6.5a-c) die normierten Impedanzen

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{(1 - k_1)p^2 + [b_1 - k_1(q_1 + x)]p + b_0 - k_1 q_1 x},$$

$$w_2(p) = \frac{p + q_2}{\left[\frac{1}{k_2} - 1\right]p + \frac{x}{k_2} - q_2},$$

$$w_3(p) = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - k_2\right]p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2(q_1 + q_2)\right]p + \frac{b_0}{k_1} - k_2 q_1 q_2}{p^2 + (q_1 + x)p + q_1 x}.$$

Ist $q_1 \neq 0$, dann darf $x = b_0/q_1$ gewählt werden. In diesem Fall ist $w_1(p)$ eine frequenzabhängige kanonisch und Übertragerfrei realisierbare Impedanz, wenn

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1}{q_1 + \frac{b_0}{q_1}}$$

gilt, und die entsprechende Realisierungsbedingung für

$w_2(p)$ lautet

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_0}{q_1 q_2} \right] .$$

Da die Koeffizienten von $w_3(p)$ automatisch nicht-negativ sind, wenn k_1 und k_2 innerhalb der genannten Grenzen liegen, muß lediglich noch eine der beiden aus Satz 2 abgeleiteten Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Verwirklichung von $w_3(p)$ nach BRUNE erfüllt sein. Für $x = b_0/q_1$ mit $b_0 < q_1 q_2$ werden diese Bedingungen direkt auf $w_3(p)$ angewandt, im Fall $b_0 > q_1 q_2$ dagegen auf $1/w_3(p)$, da die Koeffizienten von $w_3(p)$ für $b_0 > q_1 q_2$ die im Satz 2 vorausgesetzte Ungleichungsbeziehung nicht erfüllen. Für $b_0 < q_1 q_2$ führt die erste, für $b_0 > q_1 q_2$ die zweite der aus Satz 2 abgeleiteten Realisierungsbedingungen auf eine Ungleichung der Form

$$\frac{1}{k_1^2} \left[A + k_1 k_2 B + (k_1 k_2)^2 C \right] \geq 0 . \quad (6.14)$$

Dabei ist im Fall $b_0 < q_1 q_2$

$$A = b_1 \left[q_1 + \frac{b_0}{q_1} - b_1 \right] > 0 ,$$

$$B = (q_1 + q_2) \left[b_1 - q_1 - \frac{b_0}{q_1} \right] + \left[1 - \frac{b_1}{q_1} \right] (b_0 - q_1 q_2) ,$$

$$C = \frac{q_2}{q_1} (b_0 - q_1 q_2) < 0$$

und im Fall $b_0 > q_1 q_2$

$$A = b_0 b_1 \left[q_1 + \frac{b_0}{q_1} - b_1 \right] > 0 ,$$

$$B = b_0(q_1 + q_2) \left[b_1 - q_1 - \frac{b_0}{q_1} \right] + (b_0 - b_1 q_1)(q_1 q_2 - b_0) ,$$

$$C = q_1^2 (q_1 q_2 - b_0) < 0 .$$

Für $b_0 < q_1 q_2$, $k_1 = b_1 / (q_1 + b_0 / q_1)$, $k_2 = b_0 / (q_1 q_2)$ hat die linke Seite der Ungleichung (6.14) den positiven Wert

$$\left[q_1 + \frac{b_0}{q_1} - b_1 \right] (q_1 q_2 - b_0) \frac{q_1}{b_1 q_2}$$

und für $b_0 > q_1 q_2$, $k_1 = b_1 / (q_1 + b_0 / q_1)$, $k_2 = 1$ den positiven Wert

$$\left[q_1 + \frac{b_0}{q_1} - b_1 \right] (b_0 - q_1 q_2) \frac{b_0^2}{b_1 q_1^2} .$$

Da in beiden Fällen $A > 0$ und $C < 0$ gilt, ist die Ungleichung (6.14) auch erfüllt, wenn k_1 oder k_2 kleiner als die hier in die linke Ungleichungsseite eingesetzten jeweiligen Maximalwerte gewählt werden. Mit

$$0 < k \leq \text{Min} \left[\frac{b_1 q_1}{b_0 + q_1^2}, \frac{b_0 b_1}{(b_0 + q_1^2) q_2} \right] \quad (6.15a)$$

ist demzufolge ein k -Intervall gegeben, in dem die Funktion $k H_E(p)$ durch ein Übertragerfreies Netzwerk nach Bild 6.3 mit fünf Energiespeichern realisiert werden kann.

- b) Für $a_1(p) = p + q_2$, $a_2(p) = p + q_1$ verläuft die Untersuchung entsprechend. Hier ist im Fall $x = b_0 / q_2$ das zulässige Intervall für die kanonische und übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_1(p)$, $w_2(p)$, $w_3(p)$ nach BRUNE durch

$$0 < k \leq \text{Min} \left[\frac{b_1 q_2}{b_0 + q_2^2}, \frac{b_0 b_1}{(b_0 + q_2^2) q_1} \right] \quad (6.15b)$$

gegeben.

Da unter der eingangs getroffenen Voraussetzung $q_1 \leq q_2$ die Relationen

$$q_1 + \frac{b_0}{q_1} \leq q_2 + \frac{b_0}{q_2} \quad \text{für} \quad q_1 q_2 > b_0 \quad (6.16a)$$

und

$$q_1 + \frac{b_0}{q_1} \geq q_2 + \frac{b_0}{q_2} \quad \text{für} \quad q_1 q_2 < b_0 \quad (6.16b)$$

gelten, wird man für $q_1 q_2 > b_0$ die im Unterabschnitt a diskutierte Zerlegung von $H_E(p)$ wählen, während für $0 < q_1 q_2 < b_0$ die Zerlegung nach Unterabschnitt b wegen des größeren erreichbaren k-Werts vorzuziehen ist.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (6.16a,b) kann der Ausdruck $b_1 q_1 / (b_0 + q_1^2)$ in der Beziehung (6.15a) und der Ausdruck $b_0 b_1 / (b_0 q_1 + q_1 q_2^2)$ in der Beziehung (6.15b) gestrichen werden. Dies führt auf die eingangs dieses Abschnitts für $q_1 q_2 > b_0$ bzw. $0 < q_1 q_2 < b_0$ angegebenen Grenzen von k, die für $x \neq b_0/q_1$ bzw. $x \neq b_0/q_2$ unter Umständen erweitert werden können, was von Fall zu Fall untersucht werden muß.

Damit ist für die Fälle $q_1 q_2 > b_0$ und $0 < q_1 q_2 < b_0$ nachgewiesen, daß $H_E(p)$ bis auf einen positiven Faktor k durch ein übertragereis Netzwerkes nach Bild 6.3 mit fünf Energiespeichern verwirklicht werden kann. Der entsprechende Nachweis für die bisher nicht behandelten Sonderfälle $q_1 = 0$ und $q_1 = q_2 = 0$ wird ausgehend von der im Unterabschnitt a vorgenommenen Zerlegung von $H_E(p)$ geführt. Für $a_1(p) = p$, $a_2(p) = p + q_2$ ($q_2 \geq 0$), $e(p) = p + x$ ($x > 0$) erhält man aufgrund der Gln. (6.2) und (6.5a-c) die normierten Impedanzen

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{(1 - k_1) p^2 + (b_1 - k_1 x) p + b_0},$$

$$w_2(p) = \frac{p + q_2}{\left[\frac{1}{k_2} - 1\right]p + \frac{x}{k_2} - q_2},$$

$$w_3(p) = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - k_2\right]p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2q_2\right]p + \frac{b_0}{k_1}}{p^2 + xp}.$$

Dabei darf angenommen werden, daß $b_1q_2 \leq b_0$ gilt, da andernfalls $H_E(p)$ abgesehen von einem konstanten positiven Faktor durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden könnte.

Die normierte Impedanz $w_1(p)$ ist eine frequenzabhängige, kanonisch und Übertragerfrei nach BRUNE realisierbare Zweipolfunktion, wenn

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{x} \right]$$

ist und wenn mindestens eine der beiden Bedingungen

$$b_1(b_1 - x) - b_0 \geq 0, \quad x(b_1 - k_1x) - b_0 \geq 0$$

erfüllt werden kann. Damit $w_2(p)$ eine Zweipolfunktion ist, muß sich k_2 in den Grenzen

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{x}{q_2} \right]$$

bewegen, und $w_3(p)$ kann als Impedanz in der gewünschten Weise verwirklicht werden, wenn außer den für k_1 und k_2 bereits genannten Einschränkungen die Bedingung

$$0 < k_1k_2 \leq \frac{b_1x - b_0}{q_2x}$$

eingehalten wird. Aus der letztgenannten Forderung folgt, daß $x > b_0/b_1$ zu wählen ist. Damit kann die erste der beiden aus Satz 2 abgeleiteten Realisierungsbedingungen für $w_1(p)$ nur er-

füllt werden, wenn $b_1^2 > 2b_0$ gilt. Dagegen läßt sich die zweite Realisierungsbedingung stets erfüllen, wenn $x > b_0/b_1$ und k_1 genügend klein gewählt wird. Diese Bedingung liefert das eingeschränkte k_1 -Intervall

$$0 < k_1 \leq \frac{b_1 x - b_0}{x^2} < \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{x} \right].$$

Da wegen der Voraussetzung $b_1 q_2 \leq b_0$ die Beziehung $x > b_0/b_1 \geq q_2$ gilt, darf sich k_2 in den Grenzen $0 < k_2 \leq 1$ bewegen. Für das Produkt $k_1 k_2$ ergibt sich somit das zulässige Intervall

$$0 < k_1 k_2 \leq \frac{b_1 x - b_0}{x^2},$$

in dem auch die Realisierungsbedingungen für $w_3(p)$ erfüllt sind, da

$$\frac{b_1 x - b_0}{x^2} < \frac{b_1 x - b_0}{q_2 x}$$

wegen $x > b_0/b_1 \geq q_2$ gilt. Die obere Grenze des zulässigen Intervalls von $k = k_1 k_2$ nimmt für $x = 2b_0/b_1$ den eingangs dieses Abschnitts angegebenen Maximalwert $b_1^2/4b_0$ an.

6.2.6. Funktionen mit nicht-reellen Nullstellen und Polen

Jede Mindestphasen-Übertragungsfunktion der Form

$$H_E(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$(a_0, b_0, b_1 > 0; a_1 \geq 0; a_1^2 < 4a_0; b_1^2 < 4b_0; a_0 \neq b_0),$$

die weder unmittelbar noch bis auf einen konstanten Faktor durch ein Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Ener-

giespeichern realisiert werden kann, läßt sich durch ein Netzwerk nach Bild 6.3 mit sechs Energiespeichern ohne Übertrager bis auf einen konstanten Faktor $k=k_1k_2$ verwirklichen, wenn man als Erweiterungspolynom $e(p)=p^2+yp+a_0$ mit hinreichend großem y wählt.

Für $a_0 < b_0$ existiert sicher eine Lösung, wenn

$$y \geq \text{Max} \left[\left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{2}{b_1} \right] a_0 + \frac{2b_0}{b_1}, \frac{2b_1}{b_0} a_0 \right]$$

und

$$0 < k_1 \leq \frac{b_0(a_0 - b_0) + b_1(b_0y - a_0b_1)}{a_0(a_0 - b_0) + y(b_0y - a_0b_1)}, \quad 0 < k_2 \leq 1$$

ist. Im Fall $a_0 > b_0$ kann eine Realisierung in der gewünschten Form angegeben werden, wenn

$$y \geq \text{Max} \left[b_1 - \frac{2b_0}{b_1} + \frac{2a_0}{b_1}, 2b_1 \right]$$

und

$$0 < k_1 \leq \frac{b_0 - a_0 + b_1(y - b_1)}{b_0 - a_0 + y(y - b_1)}, \quad 0 < k_2 \leq 1$$

gewählt wird.

Im allgemeinen lassen sich die hier angegebenen Grenzwerte von $k=k_1k_2$ verbessern, wenn man $e(p)=p^2+yp+x$ wählt und die Parameter x, y systematisch innerhalb derjenigen Bereiche variiert, die für eine verbesserte Lösung in Frage kommen. Dies geschieht am zweckmäßigsten mit Hilfe eines programmgesteuerten Digitalrechners.

Zum Nachweis der Existenz Übertragerfreier Netzwerke nach Bild 6.3 mit insgesamt sechs Energiespeichern, durch die $H_E(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k realisiert werden kann, werden aufgrund der Gln.(6.4) und (6.7a-c) die normierten Impe-

danzen

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{(1 - k_1)p^2 + (b_1 - k_1 y)p + b_0 - k_1 x}, \quad (6.17a)$$

$$w_2(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{\left[\frac{1}{k_2} - 1\right]p^2 + \left[\frac{y}{k_2} - a_1\right]p + \frac{x}{k_2} - a_0}, \quad (6.17b)$$

$$w_3(p) = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - k_2\right]p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2 a_1\right]p + \frac{b_0}{k_1} - k_2 a_0}{p^2 + yp + x} \quad (6.17c)$$

gebildet. Diese gehen für den Sonderfall $x = a_0$, der im folgenden ausschließlich betrachtet werden soll, in

$$w_1(p) = \frac{p^2 + b_1 p + b_0}{(1 - k_1)p^2 + (b_1 - k_1 y)p + b_0 - k_1 a_0}, \quad (6.18a)$$

$$w_2(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{\left[\frac{1}{k_2} - 1\right]p^2 + \left[\frac{y}{k_2} - a_1\right]p + \left[\frac{1}{k_2} - 1\right]a_0}, \quad (6.18b)$$

$$w_3(p) = \frac{\left[\frac{1}{k_1} - k_2\right]p^2 + \left[\frac{b_1}{k_1} - k_2 a_1\right]p + \frac{b_0}{k_1} - k_2 a_0}{p^2 + yp + a_0} \quad (6.18c)$$

über.

Damit die durch Gl.(6.18a) definierte normierte Impedanz $w_1(p)$ frequenzabhängig ist und übertragerfrei nach BRUNE realisiert werden kann, muß neben

$$0 < k_1 \leq \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{y}, \frac{b_0}{a_0} \right] \quad (6.19)$$

für $a_0 < b_0$ mindestens eine der Bedingungen

$$a_0 - b_0 - b_1(y - b_1) \geq 0, \quad (6.20a)$$

$$A^{(1)}(y) - k_1 B^{(1)}(y) \geq 0 \quad (6.20b)$$

mit

$$A^{(1)}(y) = b_0(a_0 - b_0) + b_1(b_0 y - a_0 b_1),$$

$$B^{(1)}(y) = a_0(a_0 - b_0) + y(b_0 y - a_0 b_1)$$

erfüllt sein, während für $a_0 > b_0$ zusätzlich zur Forderung (6.19) noch mindestens eine der beiden Bedingungen

$$b_0(b_0 - a_0) - b_1(b_0 y - a_0 b_1) \geq 0, \quad (6.21a)$$

$$A^{(2)}(y) - k_1 B^{(2)}(y) \geq 0 \quad (6.21b)$$

mit

$$A^{(2)}(y) = b_0 - a_0 + b_1(y - b_1),$$

$$B^{(2)}(y) = b_0 - a_0 + y(y - b_1)$$

eingehalten werden muß.

Die Realisierungsbedingung für $w_2(p)$ lautet im Fall $x = a_0$

$$0 < k_2 \leq \text{Min} \left[1, \frac{y}{a_1} \right]. \quad (6.22a)$$

Die Koeffizienten der durch Gl.(6.18c) gegebenen Funktion $w_3(p)$ sind sicher nicht-negativ, wenn k_1 und k_2 den Forderungen (6.19) bzw. (6.22a) genügen. Daher muß im Fall $a_0 < b_0$ für die kanonische und übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$ nach BRUNE noch zusätzlich gefordert werden, daß mindestens eine der beiden Bedingungen

$$\frac{1}{k_1} [a_0 - b_0 - y(y - b_1)] + k_2 y(y - a_1) \geq 0, \quad (6.23a)$$

$$\frac{1}{k_1^2} A^{(1)}(y) - \frac{k_2}{k_1} C^{(1)}(y) + k_2^2 D^{(1)}(y) \geq 0 \quad (6.23b)$$

erfüllt ist. Dabei gilt

$$C^{(1)}(y) = a_0(a_0 - b_0) + a_0 b_1(y - a_1) + a_1(b_0 y - a_0 b_1) ,$$

$$D^{(1)}(y) = a_0 a_1(y - a_1) ,$$

während $A^{(1)}(y)$ bereits von der Bedingung (6.20b) her bekannt ist.

Für den Fall $a_0 > b_0$ gilt entsprechend, daß mindestens eine der beiden Bedingungen

$$\frac{1}{k_1} [a_0(b_0 - a_0) - y(b_0 y - a_0 b_1)] + k_2 a_0 y(y - a_1) \geq 0 , \quad (6.24a)$$

$$\frac{1}{k_1^2} A^{(2)}(y) - \frac{k_2}{k_1} C^{(2)}(y) + k_2^2 D^{(1)}(y) \geq 0 \quad (6.24b)$$

mit

$$C^{(2)}(y) = a_1(y - b_1) + b_1(y - a_1) + b_0 - a_0 ,$$

$$D^{(2)}(y) = a_1(y - a_1)$$

und der bereits aus Bedingung (6.21b) bekannten Funktion $A^{(2)}(y)$ erfüllt sein muß.

Während sich die Bedingungen (6.20a) und (6.23a) bzw. (6.21a) und (6.24a) nicht in allen Fällen gleichzeitig erfüllen lassen, ist dies bei den Bedingungen (6.20b) und (6.23b) bzw. (6.21b) und (6.24b) immer möglich, wenn y hinreichend groß und k_1 sowie k_2 hinreichend klein gewählt werden. Daher werden diese Bedingungen im folgenden näher untersucht.

a) Die für $a_0 < b_0$ gültige Bedingung (6.20b) kann erfüllt werden, wenn $A^{(1)}(y) > 0$ ist, d.h., wenn

$$y > \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{1}{b_1} \right] a_0 + \frac{b_0}{b_1} \quad (6.25a)$$

gewählt wird. Dann ist auch $B^{(1)}(y) > 0$, und man erhält für die Konstante k_1 das zulässige Intervall

$$0 < k_1 \leq \frac{A^{(1)}(y)}{B^{(1)}(y)} . \quad (6.26)$$

Die Bedingung (6.25a) kann nur für $y > a_1$ erfüllt werden, da andernfalls die Koeffizienten von $H_E(p)$ der Forderung (3.7b) genügen würden. Dann könnte aber $H_E(p)$ bis auf einen konstanten Faktor durch ein einzelnes Übertragerfreies Überbrücktes T-Glied mit vier Energiespeichern verwirklicht werden, was der eingangs gemachten Voraussetzung widerspräche. Damit reduziert sich die Forderung (6.22a) auf

$$0 < k_2 \leq 1 . \quad (6.22b)$$

Die Bedingung (6.19), durch die gesichert werden soll, daß keiner der Koeffizienten von $w_1(p)$ negativ wird, ist bereits in der Bedingung (6.26) enthalten, da wegen der Voraussetzungen $b_1^2 < 4b_0$, $a_0 < b_0$ für alle y , die der Forderung (6.25a) genügen,

$$\frac{A^{(1)}(y)}{B^{(1)}(y)} < \text{Min} \left[1, \frac{b_1}{y} \right]$$

gilt. Das zulässige Intervall für k_1 wird maximal, wenn

$$y = \left[\frac{b_1}{b_0} - \frac{2}{b_1} \right] a_0 + \frac{2b_0}{b_1} \quad (6.25b)$$

gewählt wird. Man erhält in diesem Fall als obere Grenze des zulässigen Intervalls von k_1 den Wert

$$k_1 = \frac{1}{\frac{a_0}{b_0} + \frac{4b_0}{b_1^2} \left[1 - \frac{a_0}{b_0} \right]} .$$

Die Bedingung (6.23b) für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit von $w_3(p)$, die sich auch in der Form

$$\frac{1}{k_1^2} \left[A^{(1)}(y) - k_1 k_2 C^{(1)}(y) + (k_1 k_2)^2 D^{(1)}(y) \right] \geq 0$$

schreiben läßt, wird sicherlich dann erfüllt, wenn auch die Bedingung (6.20b) erfüllt ist und wenn zusätzlich $C^{(1)}(y) \leq B^{(1)}(y)$ gilt, denn der Term $(k_1 k_2)^2 D^{(1)}(y)$ kann wegen $y > a_1$ keinen negativen Beitrag zur linken Seite der obigen Ungleichung leisten. Die Beziehung $C^{(1)}(y) \leq B^{(1)}(y)$ führt auf

$$(y - a_1)(b_0 y - 2a_0 b_1) \geq 0 ,$$

woraus wegen $y > a_1$ schließlich

$$y \geq \frac{2b_1}{b_0} a_0 \quad (6.25c)$$

folgt.

Insgesamt ergeben sich aus den Beziehungen (6.25a-c), (6.26) und (6.22b) die eingangs dieses Abschnitts gemachten Aussagen für den Fall $a_0 < b_0$.

- b) Die Diskussion des Falls $a_0 > b_0$ verläuft völlig analog zu den Überlegungen von Unterabschnitt a. Auch hier muß $y > a_1$ gelten, da andernfalls die Koeffizienten von $H_E(p)$ die Bedingung (3.5a) erfüllen würden, so daß eine Realisierung ohne Erweiterung möglich wäre.

Wählt man y so groß, daß $A^{(2)}(y) > 0$ und $C^{(2)}(y) \leq B^{(2)}(y)$ gilt, dann können die normierten Impedanzen $w_1(p)$, $w_2(p)$, $w_3(p)$ stets kanonisch und Übertragerfrei verwirklicht werden, sofern k_1 den aus der Forderung (6.21b) folgenden Maximalwert $A^{(2)}(y)/B^{(2)}(y)$ nicht überschreitet und $k_2 \leq 1$ ist.

Wie im Fall $a_0 < b_0$ erübrigt es sich auch hier, bei der praktischen Bestimmung des zulässigen Intervalls für k_1 zu überprüfen, ob die Forderung (6.19) eingehalten wird, da aufgrund der Beziehungen $b_1^2 < 4b_0$ und $a_0 > b_0$

$$\frac{A^{(2)}(y)}{B^{(2)}(y)} \leq \text{Min} \left[\frac{b_1}{y}, \frac{b_0}{a_0} \right]$$

für alle y mit $A^{(2)}(y) > 0$ gilt. Der obere Grenzwert von k_1 nimmt sein Maximum

$$k_1 = \frac{1}{1 + \frac{4b_0}{b_1^2} \left[\frac{a_0}{b_0} - 1 \right]}$$

bei

$$y = b_1 - \frac{2b_0}{b_1} + \frac{2a_0}{b_1}$$

an. Allerdings ist nicht gesichert, daß für diesen y -Wert in jedem Fall die Beziehung $C^{(2)}(y) \leq B^{(2)}(y)$ gilt, die wegen $y > a_1$ gleichbedeutend mit $y \geq 2b_1$ ist und zusammen mit $A^{(2)}(y) > 0$, $0 < k_1 \leq A^{(2)}(y)/B^{(2)}(y)$, $0 < k_2 \leq 1$ einen Satz hinreichender Bedingungen für die kanonische und Übertragerfreie Realisierbarkeit der drei normierten Impedanzen $w_1(p)$, $w_2(p)$ und $w_3(p)$ bildet. Es muß daher im Einzelfall geprüft werden, ob der oben angegebene Maximalwert für die obere Grenze von k_1 erreicht werden kann oder ob y größer bzw. k_1 kleiner zu wählen ist.

Die Bestimmung des optimalen Erweiterungspolynoms $e(p) = p^2 + yp + x$ ($x, y > 0$), bei dem die obere Grenze des konstanten Faktors $k = k_1 k_2$ ihren größtmöglichen Wert annimmt, geschieht auf ähnliche Weise wie im Abschnitt 3.3.4.3.d bei der Realisierung von $H_E(p)$ durch überbrückte T-Glieder.

Abschließend soll noch auf eine besonders für die praktische

Anwendung interessante Tatsache hingewiesen werden. Während die Funktionen $w_1(p)$ und $w_2(p)$ aufgrund der Voraussetzungen $a_1^2 < 4a_0$, $b_1^2 < 4b_0$ nur durch Zweipole mit zwei verschiedenartigen Energiespeichern realisiert werden können, braucht dies für $w_3(p)$ nicht unbedingt zu gelten. Es ist daher unter Umständen möglich, die Übertragungsfunktion $H_E(p)$ bis auf einen konstanten Faktor durch ein Π -Glieder oder ein T-Glieder mit insgesamt zwei Induktivitäten und vier Kapazitäten zu verwirklichen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit von $w_3(p)$ durch einen reinen RC- oder RL-Zweipol lauten

$$0 < k_1 k_2 \leq \min \left[1, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_0}{a_0} \right]$$

und

$$\left[\frac{x - b_0}{k_1} - k_2(x - a_0) \right]^2 -$$

$$- \left[\frac{y - b_1}{k_1} - k_2(y - a_1) \right] \left[\frac{b_1 x - b_0 y}{k_1} - k_2(a_1 x - a_0 y) \right] < 0 .$$

Man erhält sie, wenn man eine für rationale Funktionen zweiten Grades gültige Koeffizientenbeziehung, die von FOSTER und LADENHEIM [15] angegeben wurde und im Anhang II bewiesen wird, auf $w_3(p)$ anwendet.

7. ANWENDUNGSBEISPIELE

Die in den Kapiteln 3 bis 6 beschriebenen Realisierungsverfahren wurden an einer Reihe praktischer Beispiele erfolgreich erprobt. Die erforderlichen numerischen Rechnungen wurden zum Teil mit Hilfe eines programmierbaren Tischrechners vom Typ Hewlett-Packard 9810 und zum Teil mit Hilfe der Rechenanlage CD 3300 des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg durchgeführt.

1. Beispiel

Von R. UNBEHAUEN [7] wurde ein Entzerrer-Netzwerk in Form eines überbrückten T-Glieds mit zwölf Energiespeichern, darunter vier festgekoppelten Übertragern angegeben, dessen Dämpfungsverhalten in Abhängigkeit von der Frequenz (Bild 7.1) eine aus dem Anwendungsbereich der Trägerfrequenztechnik stammende Vorschrift hinreichend genau einhält.

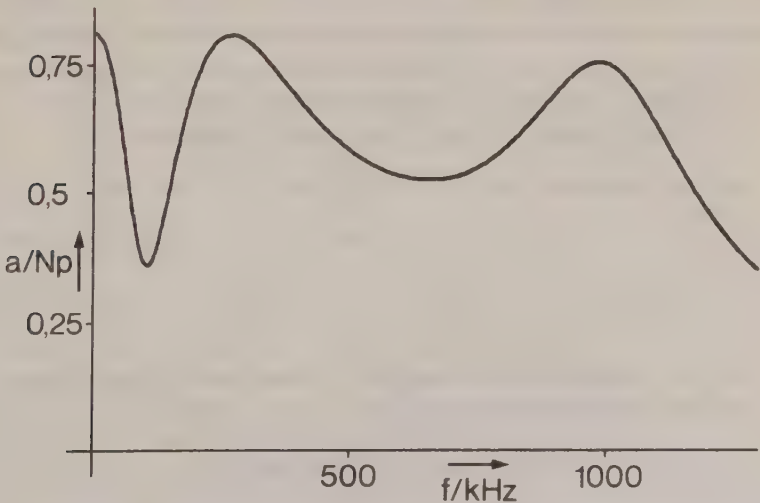


Bild 7.1: Dämpfungsverhalten des von UNBEHAUEN [7] angegebenen Entzerrers

Die Übertragungsfunktion dieses Netzwerks lautet in faktori-
sierter Form

$$H(p) = c \frac{P_1(p) P_2(p) P_3(p)}{Q_1(p) Q_2(p) Q_3(p)}$$

mit

$$c = 0.8980 ,$$

$$P_1(p) = p^2 + 9.098 \cdot 10^5 p + 3.611 \cdot 10^{11} ,$$

$$P_2(p) = p^2 + 2.116 \cdot 10^6 p + 4.106 \cdot 10^{13} ,$$

$$P_3(p) = p^2 + 1.971 \cdot 10^6 p + 2.796 \cdot 10^{12} ,$$

$$Q_1(p) = p^2 + 6.514 \cdot 10^5 p + 4.639 \cdot 10^{11} ,$$

$$Q_2(p) = p^2 + 3.588 \cdot 10^6 p + 4.418 \cdot 10^{13} ,$$

$$Q_3(p) = p^2 + 4.002 \cdot 10^6 p + 4.101 \cdot 10^{12} .$$

Von den insgesamt sechs Möglichkeiten, $H(p)$ in ein Produkt dreier Teilübertragungsfunktionen zweiten Grades zu zerlegen, führt nur eine zu einer Übertragerfreien Realisierung mit der Minimalzahl von zwölf Energiespeichern. Diese ist im Bild 7.2 in entnormierter Form ($R_0=75\Omega$, $\omega_0=1s^{-1}$) dargestellt.

Die Übertragungsfunktionen der Teilzweitore von Bild 7.2 lauten

$$H_1(p) = 0.5571 \frac{P_1(p)}{Q_1(p)} , \quad H_2(p) = \frac{P_2(p)}{Q_2(p)} , \quad H_3(p) = \frac{P_3(p)}{Q_3(p)} .$$

Für die Spannungs-Übertragungsfunktion der mit $R_0=75\Omega$ abgeschlossenen Kettenanordnung von Bild 7.2 ergibt sich somit

$$H_R(p) = H_1(p) H_2(p) H_3(p) = 0.6203 H(p) .$$

Gegenüber der Realisierung von UNBEHAUEN bietet dieses Netzwerk den Vorteil, daß es übertragerfrei ist; allerdings muß

dafür eine zusätzliche Grunddämpfung von 0.477 Np in Kauf genommen werden.

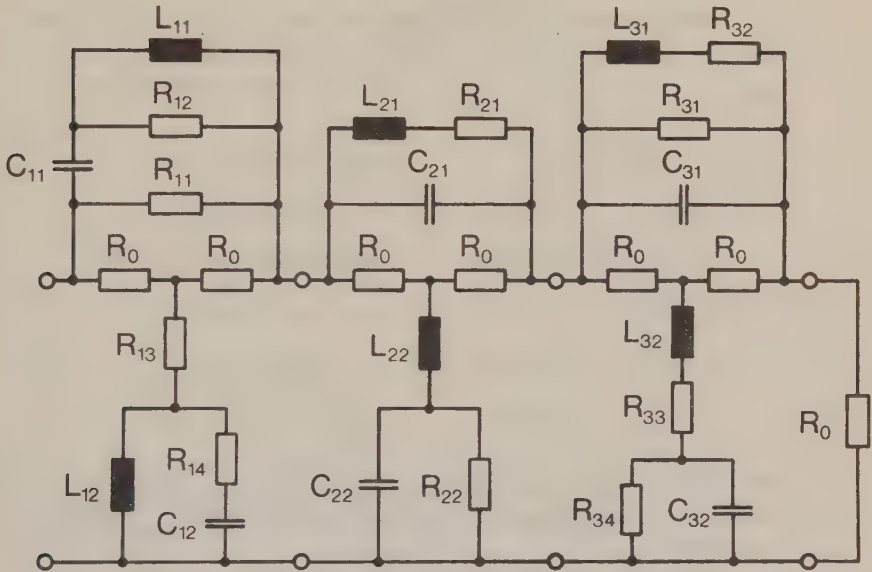


Bild 7.2: Netzwerk zur Realisierung der Übertragungsfunktion des ersten Beispiels. Die Werte der Netzwerkelemente sind der nachfolgenden Aufstellung zu entnehmen

Werte der Elemente im Netzwerk von Bild 7.2:

$$R_0 = 75 \Omega,$$

$$R_{11} = 97.93 \Omega, R_{12} = 152.4 \Omega, C_{11} = 20.11 \text{ nF}, L_{11} = 83.84 \mu\text{H}, \\ R_{13} = 57.44 \Omega, R_{14} = 36.91 \Omega, C_{12} = 14.90 \text{ nF}, L_{12} = 113.1 \mu\text{H},$$

$$R_{21} = 5.689 \Omega, C_{21} = 9.058 \text{ nF}, L_{21} = 2.689 \mu\text{H}, \\ R_{22} = 988.8 \Omega, C_{22} = 0.478 \text{ nF}, L_{22} = 50.95 \mu\text{H},$$

$$R_{31} = 114.7 \Omega, R_{32} = 50.37 \Omega, C_{31} = 6.565 \text{ nF}, L_{31} = 78.40 \mu\text{H}, \\ R_{33} = 49.06 \Omega, R_{34} = 111.7 \Omega, C_{32} = 13.94 \text{ nF}, L_{32} = 36.93 \mu\text{H}.$$

2. Beispiel

Die Übertragungsfunktion

$$H(p) = c \frac{P_1(p) P_2(p)}{Q_1(p) Q_2(p) Q_3(p)}$$

mit

$$c = 976935 ,$$

$$P_1(p) = p^2 + 4.05181 \cdot 10^6 p + 5.49487 \cdot 10^{12} ,$$

$$P_2(p) = p^2 + 1.20809 \cdot 10^7 p + 2.40109 \cdot 10^{14} ,$$

$$Q_1(p) = p^2 + 4.11365 \cdot 10^6 p + 7.11499 \cdot 10^{12} ,$$

$$Q_2(p) = p^2 + 1.39004 \cdot 10^7 p + 2.38536 \cdot 10^{14} ,$$

$$Q_3(p) = p + 766033$$

ist das Ergebnis einer Approximation, bei der nach einem Verfahren von B. GAISSMAIER [19] die tabellarisch gegebene Vorschrift

Frequenz/kHz	Dämpfung/dB
60	0.83
100	2.09
150	3.56
200	4.83
300	6.99
400	8.72
500	10.26
700	12.86
800	14.00
1000	16.02
1200	17.80
1400	19.36
1600	20.74
2000	23.05
2200	24.01
2600	25.59
2800	26.22
3200	27.19
3600	27.91
4000	28.60
4287	29.30

durch die Dämpfungsfunktion $a(f) = -20 \lg |H(j2\pi f/\omega_0)|$ mit $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ bis auf eine maximal zulässige Abweichung von $\pm 0.15 \text{ dB}$ angenähert wurde.

Das Bild 7.3 zeigt eine Kettenschaltung aus drei überbrückten T-Gliedern in entnormierter Form ($R_0 = 75 \Omega$, $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$), welche die Teilübertragungsfunktionen

$$H_1^{(1)}(p) = 0.863302 \frac{P_1(p)}{Q_1(p)},$$

$$H_2^{(1)}(p) = 0.993447 \frac{P_2(p)}{Q_2(p)}$$

bzw.

$$H_3^{(1)}(p) = 766033 \frac{1}{Q_3(p)}$$

verwirklichen. Für die Übertragungsfunktion des gesamten mit R_0 abgeschlossenen Zweitores ergibt sich somit

$$H_R^{(1)}(p) = H_1^{(1)}(p) H_2^{(1)}(p) H_3^{(1)}(p) = 0.672495 H(p).$$

Diese Realisierung stellt im Rahmen der im Kapitel 3 vereinbarten Beschränkung auf Teilübertragungsfunktionen von höchstens zweitem Grad die günstigste Lösung hinsichtlich des maximal erreichbaren konstanten Faktors und der Zahl der benötigten Energiespeicher dar.

Der mit der Realisierung von Bild 7.3 erzielte Wert des konstanten Faktors, um den sich $H_R^{(1)}(p)$ und $H(p)$ unterscheiden, kann überboten werden, wenn man die Polynomfaktoren $P_1(p)$, $Q_1(p)$ und $Q_3(p)$ zu einer Teilübertragungsfunktion dritten Grades zusammenfaßt und sie auf die im Abschnitt 4.2 beschriebene Weise verwirklicht.

Die beiden in Kette geschalteten und mit R_0 abgeschlossenen überbrückten T-Glieder von Bild 7.4 mit den Teilübertragungsfunktionen

$$H_1^{(2)}(p) = 827870 \frac{P_1(p)}{Q_1(p) Q_3(p)},$$

bzw.

$$H_2^{(2)}(p) = H_2^{(1)}(p) = 0.993447 \frac{P_2(p)}{Q_2(p)}$$

realisieren die Übertragungsfunktion

$$H_R^{(2)}(p) = H_1^{(2)}(p) H_2^{(2)}(p) = 0.841863 H(p);$$

es gilt also

$$H_R^{(2)}(p) = 1.25185 H_R^{(1)}(p).$$

Bei der Realisierung der Teilübertragungsfunktion

$$\frac{P_1(p)}{Q_1(p) Q_3(p)}$$

nach Abschnitt 4.3 konnte hinsichtlich des konstanten Faktors keine Verbesserung gegenüber den zuvor diskutierten Lösungen erzielt werden.

Werte der Elemente im Netzwerk von Bild 7.3:

$$R_0 = 75\Omega,$$

$$R_{11} = 17.37\Omega, R_{12} = 36.44\Omega, R_{13} = 1.119\Omega, C_{11} = 13.50\text{nF}, L_{11} = 4.537\mu\text{H}, \\ R_{14} = 154.4\Omega, R_{15} = 323.9\Omega, R_{16} = 5027\Omega, C_{12} = 0.807\text{nF}, L_{12} = 75.94\mu\text{H},$$

$$R_{21} = 12.74\Omega, R_{22} = 0.515\Omega, C_{21} = 6.705\text{nF}, L_{21} = 0.597\mu\text{H}, \\ R_{23} = 11370\Omega, R_{24} = 459.4\Omega, C_{22} = 0.106\text{nF}, L_{22} = 40.83\mu\text{H},$$

$$L_{31} = 97.91\mu\text{H}, C_{31} = 17.41\text{nF}.$$

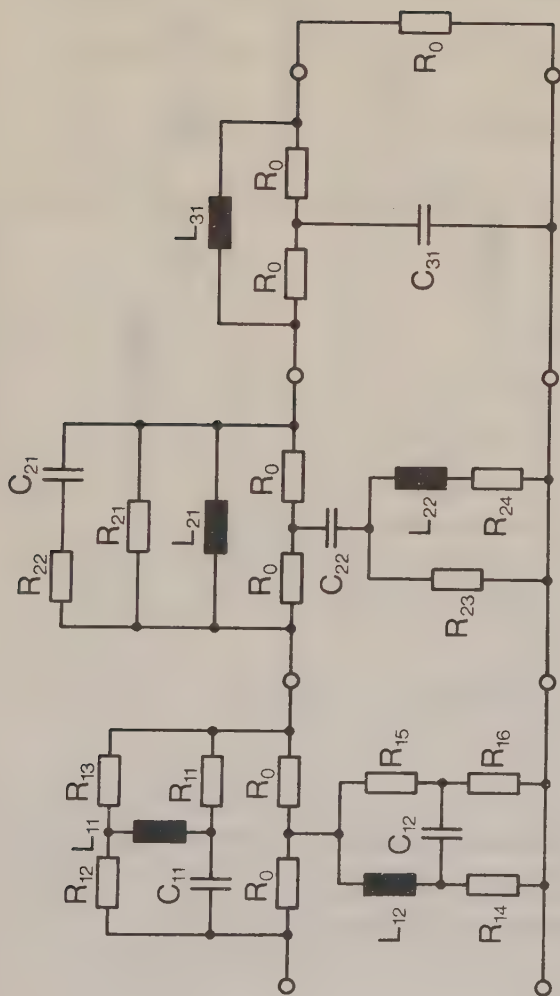


Bild 7.3: Erstes Netzwerk zur Realisierung der Übertragungsfunktion des zweiten Beispiels. Die Werte der Netzwerkelemente sind der Aufstellung auf Seite 126 zu entnehmen

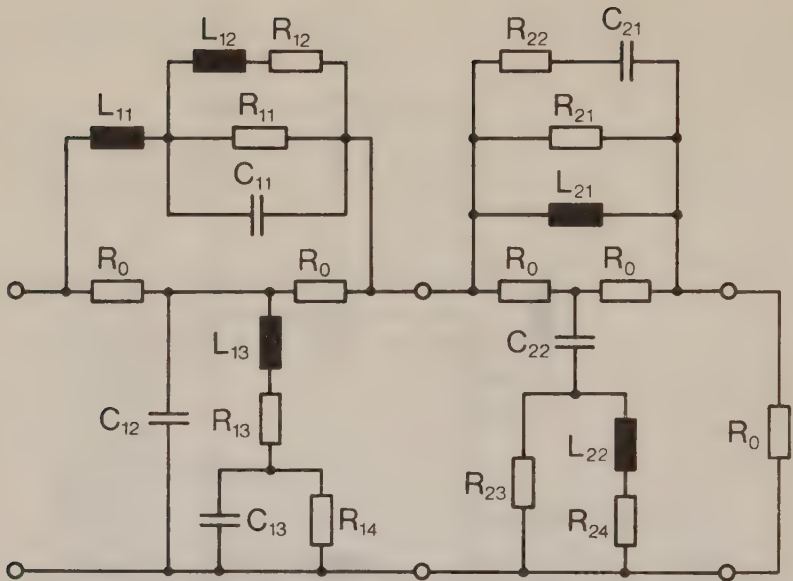


Bild 7.4: Zweites Netzwerk zur Realisierung der Übertragungsfunktion des zweiten Beispiels. Die Werte der Netzwerkelemente sind der nachfolgenden Aufstellung zu entnehmen

Werte der Elemente im Netzwerk von Bild 7.4:

$$R_0 = 75\Omega,$$

$$R_{11} = 37.58\Omega, R_{12} = 24.58\Omega, C_{11} = 7.790\text{nF}, L_{11} = 90.59\mu\text{H}, L_{12} = 38.64\mu\text{H}, \\ R_{13} = 149.7\Omega, R_{14} = 228.9\Omega, C_{12} = 16.11\text{nF}, C_{13} = 6.869\text{nF}, L_{13} = 43.82\mu\text{H},$$

$$R_{21} = 12.74\Omega, R_{22} = 0.515\Omega, C_{21} = 6.705\text{nF}, L_{21} = 0.597\mu\text{H}, \\ R_{23} = 11370\Omega, R_{24} = 459.4\Omega, C_{22} = 0.106\text{nF}, L_{22} = 40.83\mu\text{H}.$$

3. Beispiel

Für Laboruntersuchungen ist der Dämpfungsverlauf eines Kabels nachzubilden, der durch die folgende Wertetabelle gegeben ist:

Frequenz/kHz	Dämpfung/dB
20	6.2
40	7.4
70	9.3
100	11.2
150	13.8
200	16.0
300	19.8
400	23.4
600	29.5
800	35.0
1000	40.0
1200	44.8
1500	51.5
2000	61.7
3000	80.0

Durch die Funktion $a(f) = -20 \lg |H(j2\pi f/\omega_0)|$ mit $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ und

$$H(p) = c \frac{P_1(p)}{Q_1(p) Q_2(p)} ,$$

$$c = 9008.06 ,$$

$$P_1(p) = p^2 + 4.38589 \cdot 10^6 p + 3.55942 \cdot 10^{14} ,$$

$$Q_1(p) = p^2 + 6.28443 \cdot 10^6 p + 1.49307 \cdot 10^{13} ,$$

$$Q_2(p) = p + 428379$$

werden diese Sollwerte im Frequenzbereich $20 \text{ kHz} \leq f \leq 1 \text{ MHz}$ bis auf $\pm 0.3 \text{ dB}$ und im Frequenzbereich $1 \text{ MHz} < f \leq 3 \text{ MHz}$ bis auf $\pm 1.2 \text{ dB}$ angenähert.

Die Teilübertragungsfunktion

$$H_2(p) = 428379 \frac{1}{Q_2(p)}$$

kann durch ein überbrücktes T-Glied verwirklicht werden. Dagegen erfüllt keine der beiden möglichen Teilübertragungsfunktionen $P_1(p)/Q_1(p)$ und $P_1(p)/Q_2(p)$ die Bedingungen von Satz 1b. Nach Erweiterung der Funktion $P_1(p)/Q_1(p)$ mit dem Polynom

$$e(p) = p^2 + 4 \cdot 10^7 p + 2 \cdot 10^{14}$$

besteht die Möglichkeit,

$$H_1(p) = 0.0419470 \frac{P_1(p)}{e(p)} \frac{e(p)}{Q_1(p)}$$

gemäß Abschnitt 6.2.6 durch ein T-Glied mit sechs Energiespeichern übertragerfrei zu verwirklichen.

Das Bild 7.5 zeigt die Kettenanordnung aus diesem T-Glied und einem Zweitor, das durch Kurzschließen des stromlosen Widerstands aus dem überbrückten T-Glied hervorgeht, mit dem die Teilübertragungsfunktion $H_2(p)$ realisiert werden kann.

Insgesamt gilt für die Übertragungsfunktion des im Bild 7.5 in entnormierter Form ($R_0=130\Omega$, $\omega_0=1\text{ s}^{-1}$) dargestellten, mit R_0 abgeschlossenen Zweitors

$$H_R(p) = 1.99480 H(p) .$$

Die realisierte Übertragungsfunktion weist also gegenüber der gewünschten eine Dämpfungsreserve von etwa 6 dB auf, die gegebenenfalls durch Vorschalten eines ohmschen Zweitors ausgeglichen werden kann. Bemerkenswert ist weiterhin, daß die Zahl der benötigten Induktivitäten um zwei geringer ist als die Zahl der Kapazitäten, da bei der Realisierung der Teilübertragungsfunktion $H_1(p)$ eine der drei Impedanzen des T-Glieds durch einen RC-Zweipol verwirklicht werden kann.

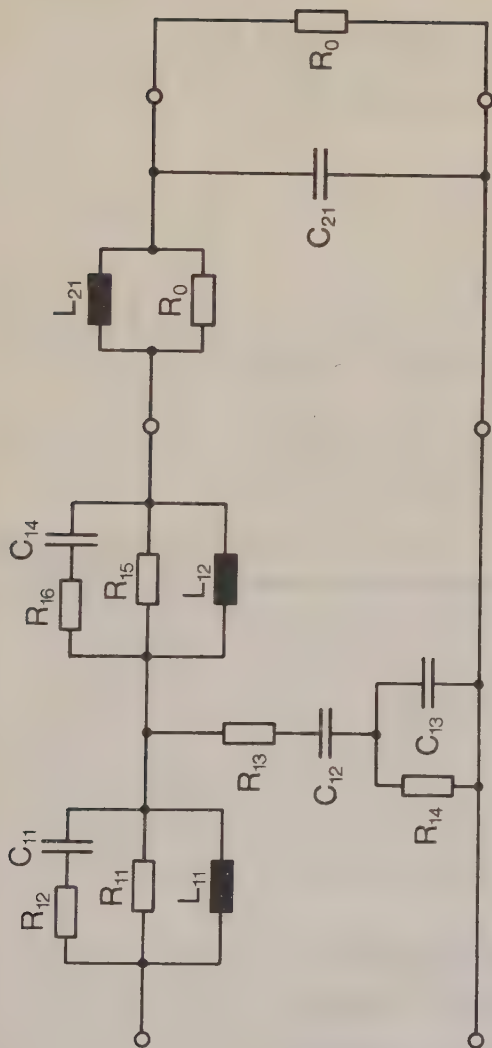


Bild 7.5: Netzwerk zur Realisierung der Übertragungsfunktion des dritten Beispiels.

Die Werte der Netzwerkelemente sind der nachfolgenden Aufstellung zu entnehmen

Werte der Elemente im Netzwerk von Bild 7.5:

$$R_0 = 130\Omega,$$

$$R_{11} = 204.6\Omega, R_{12} = 291.9\Omega, C_{11} = 0.961\text{nF}, L_{11} = 28.72\mu\text{H},$$

$$R_{13} = 10.13\Omega, R_{14} = 3.537\Omega, C_{12} = 3.143\text{nF}, C_{13} = 44.40\text{nF},$$

$$R_{15} = 37531\Omega, R_{16} = 101.6\Omega, C_{14} = 0.115\text{nF}, L_{12} = 24.40\mu\text{H},$$

$$C_{21} = 17.96\text{nF}, L_{21} = 303.5\mu\text{H}.$$

4. Beispiel

Dieses Beispiel behandelt die Synthese eines Zweitorts mit vorgeschriebener Impulsantwort. Die Vorschrift

$$h(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 2(1-t) & \text{für } 0.5 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < t \end{cases}$$

wurde nach [20] durch eine Summe dreier gedämpfter harmonischer Schwingungen (Bild 7.6) approximiert, deren Laplace-Transformierte in faktorisierter Form

$$H(p) = c \frac{P_1(p) P_2(p) P_3(p)}{Q_1(p) Q_2(p) Q_3(p)}$$

mit

$$c = 5.90248 \cdot 10^{-5},$$

$$P_1(p) = p + 39402.6,$$

$$P_2(p) = p^2 + 5.97266 p + 658.783,$$

$$P_3(p) = p^2 - 1.98685 p + 150.400,$$

$$Q_1(p) = p^2 + 7.93953 p + 21.1178,$$

$$Q_2(p) = p^2 + 2.77082 p + 370.703,$$

$$Q_3(p) = p^2 + 6.39151 p + 59.0331$$

geschrieben werden kann.

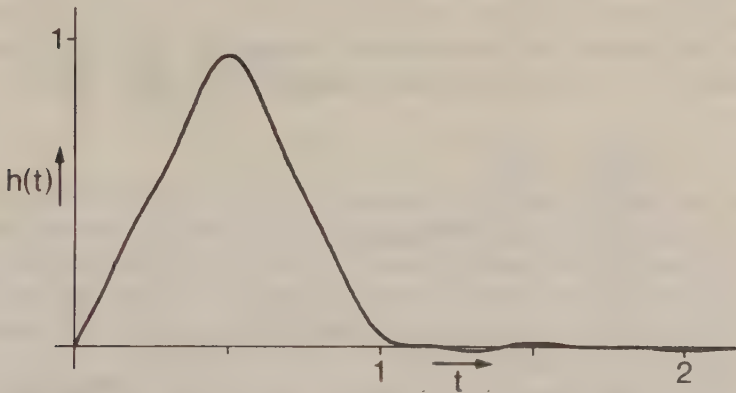


Bild 7.6: Approximation eines Dreieck-Impulses durch eine Summe von drei gedämpften harmonischen Schwingungen

Da keine der möglichen Kombinationen von Zähler- und Nennerfaktoren der Übertragungsfunktion $H(p)$ zu einer Teilübertragungsfunktion führt, die den im Satz 1b oder den in den Kapiteln 4 und 5 genannten Realisierungsbedingungen genügt, kann $H(p)$ nur nach Erweiterung mit insgesamt drei Hilfspolynomen bis auf einen konstanten Faktor durch Netzwerke der hier betrachteten Klasse verwirklicht werden. Das im Bild 7.7 gezeigte Netzwerk stellt unter den in der vorliegenden Arbeit gemachten Voraussetzungen die beste erreichbare Realisierung hinsichtlich des erforderlichen Aufwands an Energiespeichern dar.

Während die beiden Teilübertragungsfunktionen $P_1(p)/Q_1(p)$ und $P_2(p)/Q_2(p)$ jeweils nach Erweiterung mit einem Hilfspolynom

$$e_1(p) = p + 3.99982$$

bzw.

$$e_2(p) = p^2 + 49.2267 p + 385.660$$

gemäß den Abschnitten 6.2.3 und 6.2.6 bis auf einen konstanten Faktor verwirklicht werden können, sind bei der Realisierung der Teilübertragungsfunktion $P_3(p)/Q_3(p)$, deren Nullstellen in der rechten Frequenzhalbebene liegen, die Ergebnisse von Kapitel 5 zu berücksichtigen. Das Erweiterungspolynom

$$e_3(p) = p^2 + 22.5407 p + 150.400$$

ist so gewählt, daß die Funktion $P_3(p)/e_3(p)$ die Bedingung (5.2) gerade mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, wodurch bei der Realisierung zusätzlich ein Energiespeicher eingespart werden kann. Die Teilübertragungsfunktion $e_3(p)/Q_3(p)$ läßt sich bis auf einen konstanten Faktor durch ein überbrücktes T-Glied verwirklichen, so daß für die Realisierung von $P_3(p)/Q_3(p)$ insgesamt acht Energiespeicher benötigt werden.

Demgegenüber wären insgesamt elf Energiespeicher erforderlich, wenn die Übertragungsnullstellen von $P_3(p)/Q_3(p)$ durch einen übertragerfreien Allpaß ([11]) mit der Übertragungsfunktion $P_3(p)/P_3(-p)$ realisiert würde, da die verbleibende Restfunktion in diesem Fall die Bedingungen von Satz 1b verletzt.

Die Übertragungsfunktionen der einzelnen Zweitore von Bild 7.7 lauten

$$H_1(p) = 5.35951 \cdot 10^{-4} \frac{P_1(p)}{Q_1(p)},$$

$$H_2(p) = 2.93140 \cdot 10^{-2} \frac{P_2(p)}{Q_2(p)},$$

$$H_3(p) = 4.34651 \cdot 10^{-2} \frac{e_3(p)}{Q_3(p)} \frac{P_3(p)}{e_3(p)},$$

so daß für die Gesamtübertragungsfunktion des mit dem normierten Widerstand $R_0=1$ abgeschlossenen Netzwerks von Bild 7.7

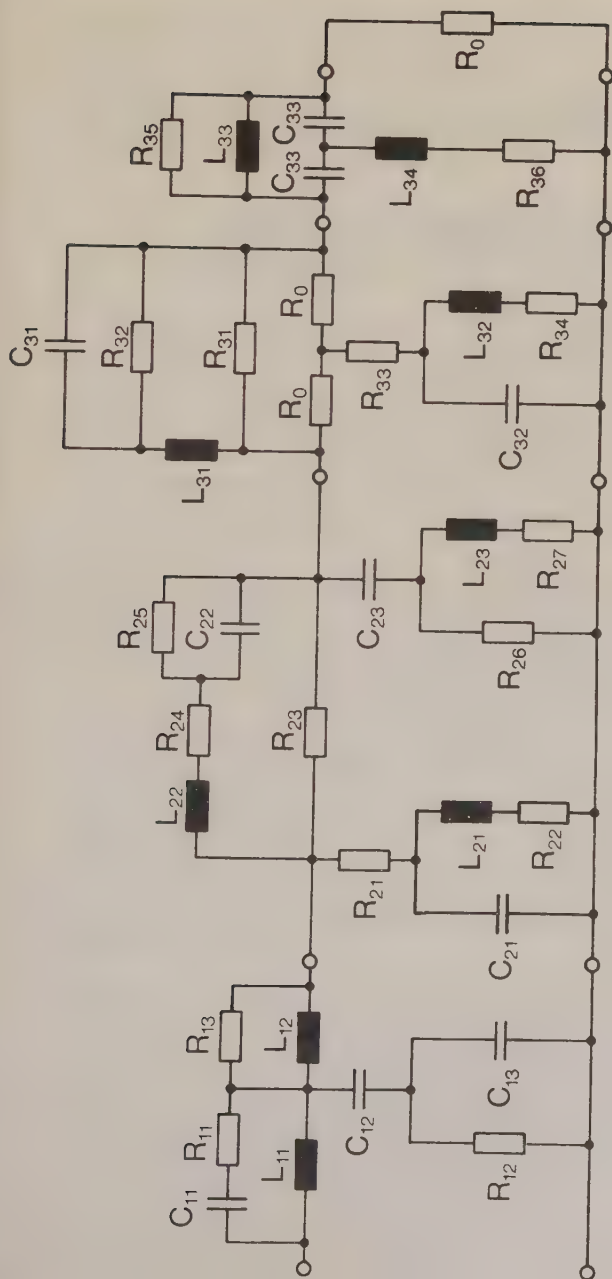


Bild 7.7: Netzwerk zur Realisierung der Übertragungsfunktion des vierten Beispiels.
Die Werte der Netzwerkelemente sind der nachfolgenden Aufstellung zu entnehmen

$$H_R(p) = 0.0115693 H(p)$$

gilt.

Werte der Elemente im Netzwerk von Bild 7.7:

$$R_0 = 1,$$

$$\begin{array}{lll} R_{11} = 1.00000, & C_{11} = 0.375963, & L_{11} = 0.125952, \\ R_{12} = 0.329976, & C_{12} = 0.375938, & C_{13} = 0.381727, \\ R_{13} = 9850.07, & L_{12} = 0.249986, & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} R_{21} = 1.05271, & R_{22} = 0.00224374, & \\ C_{21} = 0.387905, & L_{21} = 0.00696903, & \\ R_{23} = 19.3850, & R_{24} = 0.901927, & R_{25} = 295.735, \\ C_{22} = 0.00665408, & L_{22} = 0.416411, & \\ R_{26} = 1.41204, & R_{27} = 2.27288 \cdot 10^{-6}, & \\ C_{23} = 0.118576, & L_{23} = 0.0128015, & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R_{31} = 22.0070, & R_{32} = 12.6444, \\ C_{31} = 0.0139785, & L_{31} = 1.30351, \\ R_{33} = 0.0454402, & R_{34} = 0.0790863, \\ C_{32} = 1.30351, & L_{32} = 0.0139785, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} R_{35} = 2.38666 & R_{36} = 0.418995, & \\ C_{33} = 0.0815411, & L_{33} = 0.163082, & L_{34} = 0.040771. \end{array}$$

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Realisierung rationaler Mindestphasen-Übertragungsfunktionen durch Kettenanordnungen von überbrückten T-Gliedern mit jeweils höchstens vier Energiespeichern, die im Mittelpunkt der vorliegenden Untersuchungen steht, sind vor allem drei Gesichtspunkte von Bedeutung:

1. Die Impedanzen der überbrückten T-Glieder sollen durch Übertragerfreie RLC-Zweipole kanonisch realisierbar sein.
2. Die Anzahl der benötigten Energiespeicher soll möglichst klein sein.
3. Falls eine vorgegebene Übertragungsfunktion nur bis auf einen konstanten positiven Faktor verwirklicht werden kann, soll dieser möglichst nahe beim gewünschten Wert Eins liegen.

Diese drei Gesichtspunkte, die bei früheren Untersuchungen ([11], [12]) jeweils nur zum Teil Beachtung fanden, werden hier bei der Realisierung gleichzeitig berücksichtigt. Dabei ist mit der oben angegebenen Reihenfolge zugleich auch die Rangfolge für die Bewertung der drei Kriterien im Rahmen dieser Arbeit festgelegt. Die Untersuchungen beschränken sich daher ausschließlich auf Netzwerke, die nur ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten enthalten. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkung werden die Möglichkeiten zur Optimierung des für die Realisierung erforderlichen Aufwands an Energiespeichern und des maximal erreichbaren konstanten Faktors diskutiert.

Im einzelnen werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet, unter denen eine auf der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene und im Punkt Unendlich polfreie rationale Mindestphasen-Übertragungsfunktion zweiten Grades durch ein übertragerfreies überbrücktes T-Glied uneingeschränkt bzw. bis auf einen konstanten positiven Faktor verwirklicht

werden kann. Weiterhin wird gezeigt, daß sich jede derartige Übertragungsfunktion, welche diesen Bedingungen nicht genügt, bis auf einen konstanten Faktor durch eine Kettenanordnung aus zwei überbrückten T-Gliedern mit insgesamt höchstens acht Energiespeichern übertragerfrei realisieren läßt. Damit ist der im ungünstigsten Fall erforderliche Bedarf an Energiespeichern gegenüber der in [12] vorgeschlagenen Lösung erheblich reduziert.

Überbrückte T-Glieder, deren Impedanzen durch eine Reihen- bzw. Parallelschaltung mehrerer übertragerfreier Zweipole mit je einem oder zwei Energiespeichern kanonisch verwirklicht werden können, und verallgemeinerte überbrückte T-Netzwerke mit Übertragungsnullstellen in der rechten Hälfte der komplexen Frequenzebene bieten Realisierungsmöglichkeiten, die sich in vielen Fällen vorteilhaft ausnutzen lassen. Die Realisierungsbedingungen für diese speziellen Netzwerkstrukturen werden abgeleitet und diskutiert.

Schließlich werden Möglichkeiten zur Einsparung von Energiespeichern aufgezeigt, die allerdings auf solche Anwendungsfälle beschränkt sind, in denen die für überbrückte T-Glieder charakteristischen Eigenschaften (Symmetrie, konstante Eingangsimpedanz) keine notwendigen Randbedingungen darstellen.

ANHANG I

Soll eine vorgegebene Funktion

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit positiven Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ als Impedanz durch ein Brückennetzwerk nach Bild 3.1 mit positiven Netzwerkelementen realisierbar sein, so müssen die Beziehungen

$$\lambda \alpha_2 = LC (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) ,$$

$$\lambda \alpha_1 = \lambda \alpha_{11} + \lambda \alpha_{12}$$

$$\text{mit } \lambda \alpha_{11} = L(R_1 + R_3) \text{ und } \lambda \alpha_{12} = CR_1 R_2 R_3 ,$$

$$\lambda \alpha_0 = R_2 (R_1 + R_3) ,$$

$$\lambda \beta_2 = LC (R_2 + R_3) ,$$

$$\lambda \beta_1 = \lambda \beta_{11} + \lambda \beta_{12}$$

$$\text{mit } \lambda \beta_{11} = L \text{ und } \lambda \beta_{12} = CR_1 (R_2 + R_3) ,$$

$$\lambda \beta_0 = R_1 + R_2 + R_3$$

für positive Werte von L, C, R_1, R_2, R_3 und der Proportionalitätskonstante λ gelten.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie aus den Koeffizienten von $f(p)$ die Netzwerkelemente berechnet werden können und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit L, C, R_1, R_2 und R_3 positiv sind.

Aus den obigen Beziehungen erhält man

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2 + R_3} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} , \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (I.2)$$

$$\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} = R_1 + R_3, \quad (I.3)$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad (I.4)$$

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_0} = \frac{L}{R_2}, \quad (I.5)$$

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_2} = \frac{R_1}{L}, \quad (I.6)$$

$$\frac{\beta_0}{\beta_{11}} = \frac{1}{L} (R_1 + R_2 + R_3). \quad (I.7)$$

Aus den Gln.(I.1), (I.4) folgt

$$R_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}}, \quad (I.8)$$

und aus den Gln.(I.2), (I.3) ergibt sich

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\beta_0}{\alpha_0} - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}. \quad (I.9)$$

Multipliziert man die Gln.(I.5), (I.6) miteinander und setzt die in den Gln.(I.8), (I.9) ermittelten Größen R_1 und $1/R_2$ ein, so erhält man

$$\alpha_{11}^2 \beta_{12}^2 = (\alpha_{11} \beta_0 - \alpha_0 \beta_{11})(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_{12} \beta_2). \quad (I.10)$$

Aus den Gln.(I.1) und (I.2) ergibt sich

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{R_1 R_2 + 2R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_3^2}{R_2 + R_3} . \quad (\text{I.11})$$

Aus dieser Darstellung ist unmittelbar zu erkennen, daß die im Satz 3 gemachte Voraussetzung $\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2 > 0$ eine notwendige Bedingung dafür ist, daß $f(p)$ als Impedanz eines Brückennetzwerks nach Bild 3.1 mit endlichen positiven Widerständen R_1, R_2, R_3 realisiert werden kann.

Die Gl.(I.11) läßt sich mit der aus den Gln.(I.6) und (I.7) folgenden Beziehung

$$\frac{\beta_{11} \beta_{12}}{\beta_0 \beta_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (\text{I.12})$$

und den Gln.(I.3), (I.4) in der Form

$$\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2 = \alpha_{11} \beta_{12} + \alpha_{12} \beta_{11} \quad (\text{I.13})$$

schreiben. Beachtet man, daß $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$ und $\beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$ gilt, so erhält man aus den Gln.(I.10) und (I.13) nach kurzer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} & (\beta_{11} \beta_{12})^2 [4\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2] \\ & - (\beta_{11} \beta_{12}) [(\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2)(\alpha_2 \beta_0 + 3\alpha_0 \beta_2) - (\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2)(\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1)] \\ & + \beta_2 (\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2) [\beta_0 (\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2) - \beta_1 (\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1)] = 0 . \quad (\text{I.14}) \end{aligned}$$

Aus Gl.(I.11) folgt mit den Gln.(I.1) und (I.12)

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\beta_{11} \beta_{12}}{\beta_0 \beta_2} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} + R_3 \right) .$$

Löst man diese Beziehung nach $\beta_{11} \beta_{12}$ auf und setzt den entstehenden Ausdruck in Gl.(I.14) ein, so erhält man zur Bestimmung von R_3 die quadratische Gleichung

$$\beta_2 S_2 R_3^2 + S_3 R_3 + \alpha_0 S_1 = 0$$

mit den im Satz 3 eingeführten Größen S_1, S_2, S_3 . Damit diese Gleichung mindestens eine positive Lösung hat, dürfen nicht alle drei Größen S_1, S_2, S_3 das gleiche Vorzeichen haben und es darf die Diskriminante

$$S_3^2 - 4\alpha_0\beta_2 S_1 S_2 ,$$

die sich unter Verwendung der ebenfalls im Satz 3 bezeichneten Größen S_0 und S_4 auf die Form $S_0 S_4$ bringen läßt, nicht negativ werden. Da für passive Zweipole mit zwei verschiedenartigen Energiespeichern $S_0 > 0$ gelten muß, wie im Anhang II gezeigt wird, ist $S_4 \geq 0$ zu fordern, wenn die Diskriminante der Bestimmungsgleichung für R_3 nicht negativ werden soll. Durch die Forderung $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0$ werden Sonderfälle ausgeschlossen, bei denen die Brückenschaltung entartet ($R_3 = 0$ bzw. $R_3 = \infty$).

Durch Umformen der Gln.(I.1) und (I.2) erhält man die Beziehungen

$$R_2 [\beta_2 (R_1 + R_3) - \alpha_2] = (\alpha_2 - \beta_2 R_1) R_3 , \quad (I.15)$$

$$R_2 [\beta_0 (R_1 + R_3) - \alpha_0] = \alpha_0 (R_1 + R_3) , \quad (I.16)$$

aus denen

$$[\beta_0 (R_1 + R_3) - \alpha_0] (\beta_2 R_1 - \alpha_2) R_3 - [\alpha_2 - \beta_2 (R_1 + R_3)] \alpha_0 (R_1 + R_3) = 0$$

folgt. Hieraus ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Umordnen die quadratische Gleichung

$$\beta_2 (\alpha_0 + \beta_0 R_3) R_1^2 - (\alpha_0 + \beta_0 R_3) (\alpha_2 - \beta_2 R_3) R_1 - (\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2) R_3^2 = 0$$

zur Bestimmung von R_1 , die wegen $\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2 > 0$ genau eine positive Lösung hat.

Die Berechnung von R_2 kann entweder nach Gl.(I.15) oder nach Gl.(I.16) erfolgen. Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der

Voraussetzung $\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 > 0$ und wegen $R_3 > 0$ das Produkt $\beta_{11}\beta_{12}$ positiv sein muß. Da auch $R_1 > 0$ ist, kann sich R_2 nach Gl.(I.12) nur im Intervall $-(R_1 + R_3) < R_2 < \infty$ bewegen. Unter diesen Umständen ist aber die Gl.(I.2) für $\alpha_0/\beta_0 > 0$ nur zu erfüllen, wenn $R_2 > 0$ gilt. Bei der Auflösung der Gl.(I.15) bzw. (I.16) nach R_2 muß sich daher für diesen Widerstand stets ein endlicher positiver Wert

$$R_2 = \frac{R_3(\alpha_2 - \beta_2 R_1)}{\beta_2(R_1 + R_3) - \alpha_2} = \frac{\alpha_0(R_1 + R_3)}{\beta_0(R_1 + R_3) - \alpha_0}$$

ergeben. Aus den Beziehungen

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{C(R_2 + R_3)} + \frac{R_1}{L},$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_2} = \frac{1}{C} \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3} + \frac{1}{L} \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

erhält man die Größen

$$\frac{1}{L} = \frac{(R_2 + R_3)[\beta_1(R_1 + R_3) - \alpha_1]}{\beta_2 R_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3^2)},$$

$$\frac{1}{C} = \frac{(R_2 + R_3)[\alpha_1(R_2 + R_3) - \beta_1 R_2 R_3]}{\beta_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3^2)}.$$

Da das Produkt

$$\frac{1}{LC} = \frac{\beta_0}{\beta_2} \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

stets positiv sein muß, kann weder $\alpha_1 \geq \beta_1(R_1 + R_3)$ noch $\alpha_1(R_2 + R_3) \leq \beta_1 R_2 R_3$ sein. Falls nur eine dieser Beziehungen gelten würde, müßte $1/(LC) \leq 0$ sein. Die Möglichkeit, daß beide Beziehungen gleichzeitig bestehen, ist ebenfalls ausgeschlossen, da dies auf die Forderung $R_2 R_3 \geq (R_1 + R_3)(R_2 + R_3)$, d.h.

$R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3^2 \leq 0$ führen würde. Somit ergeben sich auch für L und C positive Werte.

Zwischen den im Satz 3 definierten Größen S_1, S_2, S_3 und S_4 bestehen einige interessante Beziehungen, auf die im folgenden näher eingegangen wird. Hierzu werden die normierten Funktionen

$$s_1 = \frac{S_1}{\alpha_2^2 \beta_2}, \quad s_2 = \frac{S_2}{\alpha_2 \beta_2^2}, \quad s_3 = \frac{S_3}{\alpha_2^2 \beta_2^2}, \quad s_4 = \frac{S_4}{\alpha_2^2 \beta_2^2}$$

eingeführt, die sich in Abhängigkeit von $\alpha_0/\alpha_2, \alpha_1/\alpha_2, \beta_0, \beta_2, \beta_1/\beta_2$ darstellen lassen.

Zunächst wird untersucht, unter welchen Bedingungen $s_1=0$ und $s_4=0$ bzw. $s_1=0$ und $s_3=0$ gilt.

Aus $s_1=0$ folgt

$$\frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right]. \quad (\text{I.17})$$

Mit dieser Beziehung erhält man aus der Gleichung $s_4=0$ nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} \left[3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right]^2 = 0.$$

Hieraus folgt wegen $\alpha_0/\alpha_2 > 0$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{3} \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0 \quad (\text{I.18a})$$

und wegen Gl. (I.17)

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} - \frac{\beta_0}{\beta_2} + \frac{2}{9} \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} \right]^2 = 0. \quad (\text{I.18b})$$

Die Gleichung $s_3=0$ liefert zusammen mit $s_1=0$ in der Form von Gl.(I.17)

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left[\frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right] \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} - 3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right] = 0 .$$

Da $\alpha_0/\alpha_1 > 0$ und $\beta_0/\beta_2 - \alpha_0/\alpha_2 > 0$ ist, müssen ebenfalls die Beziehungen (I.18a) und (I.18b) gelten, wenn $s_1=0$ und $s_3=0$ sein soll.

Die Bedingungen, unter denen $s_2=0$, $s_4=0$ bzw. $s_2=0$, $s_3=0$ gilt, lassen sich entsprechend herleiten.

Aus $s_2=0$ erhält man

$$\frac{\beta_0}{\beta_2} \left[\frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right] = \frac{\beta_1}{\beta_2} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \frac{\beta_1}{\beta_2} \right] . \quad (\text{I.19})$$

Mit Gl.(I.19) folgt aus der Beziehung $s_4=0$ nach kurzer Rechnung

$$\left[\frac{\alpha_1 \beta_0}{\alpha_2 \beta_2} - 3 \frac{\alpha_0 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} \right]^2 = 0 .$$

Diese Gleichung liefert zusammen mit Gl.(I.19) die Bedingungen, unter denen s_2 und s_4 gleichzeitig verschwinden:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} \left[2 \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} \right]^2 + \frac{\beta_0}{\beta_2} \right] - \left[\frac{\beta_0}{\beta_2} \right]^2 = 0 , \quad (\text{I.20a})$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[2 \left[\frac{\beta_1}{\beta_2} \right]^2 + \frac{\beta_0}{\beta_2} \right] - 3 \frac{\beta_0}{\beta_2} \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0 . \quad (\text{I.20b})$$

Die Forderung $s_2=0$, $s_3=0$ führt auf die Gleichung

$$\left[\frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right] \left[\frac{\alpha_1 \beta_0}{\alpha_2 \beta_2} - 3 \frac{\alpha_0 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} \right] = 0 ,$$

aus der in Verbindung mit Gl.(I.19) die Beziehungen (I.20a,b) folgen.

Wie man leicht nachprüft, lassen sich die Forderungen $s_3=0$, $s_4=0$ nur dann gleichzeitig erfüllen, wenn entweder die Gln.(I.18a,b) oder die Gln.(I.20a,b) gelten.

Man kann die hier abgeleiteten Zusammenhänge zwischen den algebraischen Gleichungen $s_1=0$, $s_3=0$, $s_4=0$ bzw. $s_2=0$, $s_3=0$, $s_4=0$ geometrisch interpretieren, wenn man diese Gleichungen als Hyperflächen in einem vierdimensionalen euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten α_0/α_2 , α_1/α_2 , β_0/β_2 und β_1/β_2 auffaßt. Dieser Raum ist allerdings durch die Voraussetzungen $\alpha_0/\alpha_2 > 0$, $\alpha_1/\alpha_2 > 0$, $\beta_0/\beta_2 > 0$, $\beta_1/\beta_2 > 0$ und $\alpha_0/\alpha_2 < \beta_0/\beta_2$ begrenzt.

Im einzelnen stellt man fest, daß sich die durch $s_1=0$ und $s_4=0$ definierten Hyperflächen längs einer dreidimensionalen Fläche F_1 berühren, welche durch die Gln.(I.18a,b) gegeben ist. Darüber hinaus besitzen sie keine gemeinsamen Punkte.

Entsprechendes gilt für die beiden Hyperflächen, die durch $s_2=0$ und $s_4=0$ gegeben sind. In diesem Fall ist die Berührungsfläche F_2 durch die Gln.(I.20a,b) definiert.

Die Flächen F_1 und F_2 verlaufen in der Hyperfläche $s_3=0$. Diese hat darüber hinaus keine gemeinsamen Punkte mit der Hyperfläche $s_4=0$. Dagegen schneidet sie die Hyperflächen $s_1=0$ und $s_2=0$ noch zusätzlich in der Ebene

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} - \frac{\beta_0}{\beta_2} = 0, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0,$$

die allerdings nicht mehr im zulässigen Bereich des Raumes liegt.

ANHANG II

Eine reelle rationale Funktion zweiten Grades

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}$$

mit nicht-negativen Koeffizienten kann nach R.M. FOSTER und E.L. LADENHEIM [15] genau dann als Impedanz eines aus ohmschen Widerständen und zwei gleichartigen Energiespeichern bestehenden Zweipols kanonisch verwirklicht werden, wenn

$$(\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2)^2 - (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)(\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1) < 0 \quad (\text{II.1})$$

gilt. Für $\alpha_2 \beta_0 > \alpha_0 \beta_2$ ist $f(p)$ eine RL-Impedanzfunktion, für $\alpha_2 \beta_0 < \alpha_0 \beta_2$ eine RC-Impedanzfunktion.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden die beiden folgenden Sonderfälle untersucht:

- a) Es ist $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 = 0$. In diesem Fall liefert die Bedingung (II.1) die Beziehung

$$\alpha_2 (\alpha_2 \beta_0^2 - \alpha_1 \beta_0 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1^2) < 0.$$

Da α_2 voraussetzungsgemäß positiv ist, folgt hieraus

$$\alpha_1 \beta_0 \beta_1 - \alpha_2 \beta_0^2 - \alpha_0 \beta_1^2 > 0.$$

Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß $f(p)$ als RL-Impedanz realisiert werden kann, wie man anhand der Darstellung

$$f(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_1 p + \beta_0} = \frac{\alpha_2}{\beta_1} p + \frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{\left[\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\beta_0}{\beta_1} - \alpha_0 \frac{\beta_1}{\beta_0} \right] p}{\beta_1 p + \beta_0}$$

unmittelbar erkennt. Insbesondere ergibt sich aus dieser Bedingung, daß $\beta_0 > 0$ gelten muß, woraus wegen $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 = 0$ die Beziehung $\alpha_2 \beta_0 > \alpha_0 \beta_2$ folgt. Der Fall $\alpha_2 \beta_0 < \alpha_0 \beta_2$ kann also hier nicht auftreten.

- b) Es ist $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 > 0$. Für diesen Sonderfall vereinfacht sich die Bedingung (II.1) folgendermaßen:

$$\beta_2 (\alpha_0^2 \beta_2 + \alpha_1^2 \beta_0 - \alpha_0 \alpha_1 \beta_1) < 0 .$$

Da β_2 voraussetzungsgemäß positiv ist, folgt hieraus

$$\alpha_0 \alpha_1 \beta_1 - \alpha_0^2 \beta_2 - \alpha_1^2 \beta_0 > 0 .$$

Wie aus der Darstellung

$$f(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0} = \left[\frac{\beta_2}{\alpha_1} p + \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{\left[\beta_1 - \beta_2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \beta_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right] p}{\alpha_1 p + \alpha_0} \right]^{-1}$$

hervorgeht, ist diese Bedingung notwendig und hinreichend dafür, daß $f(p)$ als RC-Impedanz realisiert werden kann. Insbesondere muß aufgrund dieser Bedingung $\alpha_0 > 0$ gelten, woraus wegen $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 > 0$ nur die Beziehung $\alpha_2 \beta_0 < \alpha_0 \beta_2$ folgen kann.

Damit ist für die Sonderfälle $\alpha_2 = 0$ bzw. $\beta_2 = 0$ gezeigt, daß $f(p)$ genau dann als Impedanz eines Zweipols aus ohmschen Widerständen und zwei gleichartigen Energiespeichern verwirklicht werden kann, wenn die Bedingung (II.1) erfüllt ist.

Für die weiteren Untersuchungen darf daher angenommen werden, daß $f(p)$ in der normierten Form

$$f(p) = \frac{(p + q_1)(p + q_2)}{(p + p_1)(p + p_2)}$$

vorliegt. Hierbei haben die Größen p_1 , p_2 bzw. q_1 , q_2 entweder reelle nicht-negative oder konjugiert komplexe Werte

mit nicht-negativen Realteilen. Die Bedingung (II.1) führt im Fall der normierten Funktion $f(p)$ auf die Ungleichung

$$(p_1 p_2 - q_1 q_2)^2 - (p_1 + p_2 - q_1 - q_2) [(q_1 + q_2) p_1 p_2 - (p_1 + p_2) q_1 q_2] < 0 ,$$

die sich nach kurzer Zwischenrechnung auf die Form

$$(p_1 - q_1)(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)(p_2 - q_2) < 0 \quad (\text{II.2})$$

bringen läßt.

Die Bedingung (II.2) kann offensichtlich nur dann erfüllt werden, wenn sowohl die Nullstellen als auch die Pole von $f(p)$ reell sind. Andernfalls lassen sich nämlich auf der linken Seite der Ungleichung (II.2) jeweils zwei zueinander konjugiert komplexe Faktoren zu einem reellen nicht-negativen Faktor zusammenfassen. Beispielsweise erhält man im Fall konjugiert komplexer Nullstellen ($q_2 = q_1^*$) und reeller Pole von $f(p)$ für die linke Seite der Ungleichung (II.2) den Ausdruck

$$(p_1 - q_1)(p_1 - q_1^*)(p_2 - q_1)(p_2 - q_1^*) = |p_1 - q_1|^2 |p_2 - q_1|^2 ,$$

der für beliebige Werte p_1, p_2, q_1 nicht-negativ ist.

Besitzt die Funktion $f(p)$ nur reelle Nullstellen und Pole, so ist die Bedingung (II.2) genau dann erfüllt, wenn diese sich auf der reellen Achse gegenseitig abwechseln. Das ist aber unter der Voraussetzung $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(p)$ als Impedanz durch einen Zweipol verwirklicht werden kann, der nur aus ohmschen Widerständen und Energiespeichern von gleichem Typ aufgebaut ist.

Falls $\beta_0 > \alpha_0$, d.h. $p_1 p_2 > q_1 q_2$ gilt, stößt man zunächst auf eine Nullstelle von $f(p)$, wenn man von $p=0$ aus die negativ-reelle Achse der p -Ebene durchläuft. Die Funktion $f(p)$ ist in diesem Fall eine RL-Impedanzfunktion. Analog dazu muß $f(p)$ für $\beta_0 < \alpha_0$ eine RC-Impedanzfunktion sein. Die Aussage von FOSTER und LADENHEIM ist damit vollständig bewiesen.

ANHANG III

Eine notwendige Bedingung dafür, daß die im Abschnitt 3.1 definierte Übertragungsfunktion $H_E(p)$ bis auf einen konstanten Faktor k durch ein überbrücktes T-Glied realisierbar ist, dessen Impedanzen nach FOSTER und LADENHEIM, jedoch nicht nach BRUNE kanonisch und Übertragerfrei verwirklicht werden können, besteht nach Abschnitt 3.3.4.1 darin, daß für $u \equiv a_0 > b_0$ die Beziehungen $S_1^{(1)} > 0$, $S_2^{(1)} > 0$, $S_3^{(1)} \leq 0$ und im Fall $u \equiv a_0 < b_0$ die Beziehungen $S_1^{(2)} > 0$, $S_2^{(2)} > 0$, $S_3^{(2)} \leq 0$ gleichzeitig gelten. Es wird im folgenden gezeigt, daß diese Bedingung nicht erfüllt werden kann, falls $b_1^2 \geq 4b_0$ ist.

a) Der Fall $a_0 > b_0$:

Durchläuft man in der (u,v) -Ebene die Kurve $S_3^{(1)} = 0$ vom Punkt (b_0, b_1) aus im Uhrzeigersinn, so gelten für alle Punkte längs eines gewissen Kurvenstücks oberhalb von (b_0, b_1) die Beziehungen $S_1^{(1)} < 0$, $S_2^{(1)} > 0$. Dies kann unmittelbar anhand von Bild 3.7b festgestellt werden. Kehrt man nach dem vollständigen Durchlaufen der Kurve $S_3^{(1)} = 0$ zum Ausgangspunkt zurück, so ist für alle Kurvenpunkte unterhalb von (b_0, b_1) , die in unmittelbarer Umgebung dieses Punktes liegen, $S_1^{(1)} > 0$ und $S_2^{(1)} < 0$. Nun folgt aus Anhang I, Gl.n. (I.18a,b) und (I.20a,b) in Verbindung mit Gl.(3.3) von Abschnitt 3.3.4.1, daß die Kurve $S_3^{(1)} = 0$ im interessierenden Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ ($0 < k < 1$) höchstens einen Schnittpunkt mit der Kurve $S_1^{(1)} = 0$ und genau einen Schnittpunkt mit der Kurve $S_2^{(1)} = 0$ hat.

Die Koordinaten des einzig möglichen Schnittpunkts von $S_1^{(1)} = 0$ und $S_3^{(1)} = 0$ im Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ ($0 < k < 1$) lassen sich aufgrund der im Anhang I ermittelten Beziehungen (I.18a,b) bestimmen. Aus Gl.(3.3) erhält man mit den Gl.n. (I.18a,b)

$$\frac{\frac{b_0}{k} - a_0}{\frac{1}{k} - 1} - a_0 + \frac{2}{9}a_1^2 = 0, \quad \frac{\frac{b_1}{k} - a_1}{\frac{1}{k} - 1} - \frac{a_1}{3} = 0,$$

woraus

$$u \equiv a_0 = b_0 + \frac{2(1-k)}{(1+2k)^2} b_1^2, \quad v \equiv a_1 = \frac{3}{1+2k} b_1,$$

folgt.

Zunächst soll angenommen werden, daß $b_0 > 2kb_1^2/(1+2k)^2$ gilt, d.h., daß die Abszisse des Schnittpunkts im Intervall $b_0 < u < b_0/k$ liegt. Setzt man die Schnittpunktskoordinaten in die Gl.(3.6b) ein, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$S_2^{(1)} = \frac{2(1-k)}{k(1+2k)^2} b_1^2 \left[4b_0 - \frac{1+8k}{(1+2k)^2} b_1^2 \right].$$

Im Intervall $0 < k < 1$ ist

$$\frac{1+8k}{(1+2k)^2} > 1.$$

Da $b_1^2 \geq 4b_0$ vorausgesetzt wurde, ist $S_2^{(1)}$ im Schnittpunkt der Kurven $S_1^{(1)}=0$ und $S_3^{(1)}=0$ für beliebige Werte von k aus dem Intervall $0 < k < 1$ negativ.

Aufgrund der Tatsache, daß beim Durchlaufen des im Gebiet $u > b_0$ gelegenen Teils der Kurve $S_3^{(1)}=0$ die in u , v und k stetigen Ausdrücke $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ ihr Vorzeichen mindestens einmal wechseln müssen, daß weiterhin die Kurve $S_3^{(1)}=0$ mit den Kurven $S_1^{(1)}=0$ und $S_2^{(1)}=0$ im Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ jeweils nur einen Punkt gemeinsam hat und daß im Schnittpunkt der Kurven $S_1^{(1)}=0$ und $S_3^{(1)}=0$ der Ausdruck $S_2^{(1)}$ negativ ist, läßt sich folgendes aussagen:

Durchläuft man die Kurve $S_3^{(1)}=0$ von (b_0, b_1) aus im Uhrzeigersinn, so wechselt zunächst der Ausdruck $S_2^{(1)}$ sein Vorzeichen von Plus nach Minus, ehe $S_1^{(1)}$ von negativen zu positiven Werten übergeht. Damit ist für alle Punkte der Kurve $S_3^{(1)}=0$ im Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ mindestens einer der beiden Ausdrücke $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ negativ. Die Kurve $S_3^{(1)}=0$ und das von ihr

eingeschlossene Gebiet, das durch $S_3^{(1)} < 0$ definiert ist, muß sich deshalb vollständig innerhalb des von den Kurven $S_1^{(1)} = 0$ und $S_2^{(1)} = 0$ insgesamt umschlossenen Gebiets befinden, soweit dieses im Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ liegt. Die Bedingungen $S_1^{(1)} > 0$, $S_2^{(1)} > 0$, $S_3^{(1)} \leq 0$ sind also für $b_1^2 \geq 4b_0$ und $b_0 < u < b_0/k$ nicht gleichzeitig zu erfüllen.

Für den Fall $b_0 \leq 2kb_1^2/(1+2k)^2$, bei dem sämtliche Schnittpunkte der Kurven $S_1^{(1)} = 0$ und $S_3^{(1)} = 0$ im Gebiet $u \geq b_0/k$ liegen, muß lediglich gezeigt werden, daß man zuerst die Kurve $S_2^{(1)} = 0$ und danach die Gerade $u = b_0/k$ schneidet, wenn man die Kurve $S_3^{(1)} = 0$ von (b_0, b_1) aus im Uhrzeigersinn durchläuft. Dies geschieht am einfachsten durch den Nachweis, daß in den Schnittpunkten der Kurve $S_3^{(1)} = 0$ mit der Gerade $u = b_0/k$ der Ausdruck $S_2^{(1)}$ negativ ist.

Für die Koordinaten dieser Schnittpunkte erhält man

$$u = \frac{b_0}{k}, \quad v = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{1}{k} + 1 \right] b_1 \pm \left[\frac{1}{k} - 1 \right] \sqrt{b_1^2 - 4b_0} \right].$$

Die zugehörigen Werte von $S_2^{(1)}$ in diesen Punkten lauten

$$S_2^{(1)} = \frac{2b_0^2}{k} \left[\frac{1}{k} - 1 \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{b_1^2}{4b_0} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4b_0} \left[\frac{b_1^2}{4b_0} - 1 \right]} \right]$$

und sind für $b_1^2 \geq 4b_0$ stets negativ, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die weiteren Schlußfolgerungen verlaufen wie im Fall $b_0 > 2kb_1^2/(1+2k)^2$. Damit ist nachgewiesen, daß auch für $b_0 \leq 2kb_1^2/(1+2k)^2$ die Bedingungen $S_1^{(1)} > 0$, $S_2^{(1)} > 0$, $S_3^{(1)} \leq 0$ im Gebiet $b_0 < u < b_0/k$ nicht gleichzeitig erfüllt werden können, wenn $b_1^2 \geq 4b_0$ gilt.

b) Der Fall $a_0 < b_0$:

Die Überlegungen verlaufen hier völlig analog zum Fall $a_0 > b_0$. Die Koordinaten des einzig möglichen Schnittpunkts von $S_1^{(2)} = 0$ und $S_3^{(2)} = 0$ im Gebiet $0 < u < b_0$ lassen sich aufgrund der im Anhang I ermittelten Beziehungen (I.18a,b)

bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß diese Beziehungen im Fall $a_0 < b_0$ nicht auf die Funktion $z(p)$ von Gl.(3.3), sondern auf die reziproke Funktion $1/z(p)$ angewendet werden müssen. Für die Schnittpunktskoordinaten ergeben sich dann die Gleichungen

$$a_0 - \frac{\frac{b_0}{k} - a_0}{\frac{1}{k} - 1} + \frac{2}{9} \left[\frac{\frac{b_1}{k} - a_1}{\frac{1}{k} - 1} \right]^2 = 0, \quad a_1 - \frac{\frac{b_1}{k} - a_1}{\frac{1}{k} - 1} = 0,$$

aus denen

$$u \equiv a_0 = b_0 - \frac{2(1-k)}{(3-2k)^2} b_1^2, \quad v \equiv a_1 = \frac{b_1}{3-2k}$$

folgt.

Zunächst wird angenommen, daß die Abszisse des Schnittpunkts im Intervall $0 < u < b_0$ liegt. Setzt man die ermittelten Schnittpunktskoordinaten in Gl.(3.8b) ein, so ergibt sich

$$S_2^{(2)} = \frac{2(1-k)^2 b_1^2}{k^2 (3-2k)^2} \left[4b_0 - \frac{9-8k}{(3-2k)^2} b_1^2 \right].$$

Dieser Ausdruck ist wegen $b_1^2 \geq 4b_0$ für beliebige k -Werte aus dem Intervall $0 < k < 1$ negativ.

Wird die Kurve $S_3^{(2)} = 0$ von (b_0, b_1) aus im Uhrzeigersinn durchlaufen, so gelten zunächst für alle Kurvenpunkte unmittelbar unterhalb von (b_0, b_1) die Beziehungen $S_1^{(2)} < 0$ und $S_2^{(2)} > 0$. Am Ende des Durchlaufs sind die Verhältnisse umgekehrt. Hier gelten für alle Kurvenpunkte, die unmittelbar oberhalb des Punktes (b_0, b_1) liegen, die Beziehungen $S_1^{(2)} > 0$ und $S_2^{(2)} < 0$. Aus der Tatsache, daß die Kurve $S_3^{(2)} = 0$ im Gebiet $0 < u < b_0$ mit den Kurven $S_1^{(2)} = 0$ und $S_2^{(2)} = 0$ jeweils genau einen Punkt gemeinsam hat und daß im Schnittpunkt der beiden Kurven $S_1^{(2)} = 0$ und $S_3^{(2)} = 0$ der Ausdruck

$S_2^{(2)}$ negativ ist, kann gefolgert werden, daß zunächst der Ausdruck $S_2^{(2)}$ und danach der Ausdruck $S_1^{(2)}$ sein Vorzeichen wechselt, wenn man die Kurve $S_3^{(2)}=0$ von (b_0, b_1) aus im Uhrzeigersinn durchläuft. Daher ist in allen Punkten des Gebiets $0 < u < b_0$, in denen $S_3^{(2)}=0$ gilt, mindestens einer der beiden Ausdrücke $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ negativ. Die Kurve $S_3^{(2)}=0$ und damit auch das von ihr im offenen ersten Quadranten der (u, v) -Ebene eingeschlossene Gebiet, das durch die Ungleichung $S_3^{(2)} < 0$ definiert ist, liegen demzufolge vollständig in dem von den Kurven $S_1^{(2)}=0$ und $S_2^{(2)}=0$ insgesamt umschlossenen Gebiet. Die Bedingungen $S_1^{(2)} > 0$, $S_2^{(2)} > 0$, $S_3^{(2)} \leq 0$ sind also im Gebiet $0 < u < b_0$ nicht zu erfüllen, wenn $b_1^2 \geq 4b_0$ gilt.

Für den Fall, daß sämtliche Schnittpunkte der Kurven $S_1^{(2)}=0$ und $S_3^{(2)}=0$ außerhalb des Gebiets $0 < u < b_0$ liegen, muß lediglich nachgewiesen werden, daß in den Schnittpunkten der Kurve $S_3^{(2)}=0$ mit der v -Achse der Ausdruck $S_2^{(2)}$ negativ ist. Dann ist gewährleistet, daß längs der gesamten Kurve $S_3^{(2)}=0$, soweit sie im Gebiet $0 < u < b_0$ verläuft, mindestens einer der beiden Ausdrücke $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ negativ ist und daß demzufolge die Bedingungen $S_1^{(2)} > 0$, $S_2^{(2)} > 0$, $S_3^{(2)} \leq 0$ nicht gleichzeitig erfüllt werden können, wenn $b_1^2 \geq 4b_0$ gilt.

Als Koordinaten der Schnittpunkte von $S_3^{(2)}=0$ mit der v -Achse erhält man aus Gl.(3.11c)

$$u \equiv a_0 = 0, \quad v \equiv a_1 = \frac{1}{2} \left[b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0} \right].$$

Die zugehörigen Werte von $S_2^{(2)}$, die sich durch Einsetzen der Schnittpunktskoordinaten in Gl.(3.8b) ermitteln lassen, lauten

$$S_2^{(2)} = -\frac{b_0}{4k} \left[\frac{1}{k} - 1 \right] \left[b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0} \right]^2$$

und sind unter der Voraussetzung $b_1^2 \geq 4b_0$, $0 < k < 1$ negativ, was zu beweisen war.

Damit ist nachgewiesen, daß für den Fall $b_1^2 \geq 4b_0$ die Realisierung der normierten Impedanz von Gl.(3.3) nach FOSTER und LADENHEIM bezüglich des maximal erreichbaren Faktors k keine Vorteile gegenüber der Realisierung nach BRUNE bringt. Dasselbe gilt für den Fall $a_1^2 \geq 4a_0$. Der Beweis dieser Aussage verläuft entsprechend.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. ANTREICH: Zur Realisierung von Dämpfungsfunktionen mit reflexionsfreien Impedanzvierpolen. Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe 1966.
- [2] J.S. BELL: An approach to the design of constant-resistance amplitude equalizer networks. Proc. IEE 105 (1958), S. 185 - 189.
- [3] J. BIMONT: Egaliseurs d'amplitude à impédance constante. Cables et Transmission 13 (1959), S. 157 - 187.
- [4] J. LEGRAS: Synthèse de réseaux correcteurs d'affaiblissement par méthode de modelage. Cables et Transmission 13 (1959), S. 94 - 122.
- [5] S. KÖRNER: Grafisches Approximationsverfahren im Frequenzbereich mit Hilfe von Schablonen. Wiss. Z. Elektrotechn. 6 (1965), S. 53 - 85.
- [6] S. KÖRNER: Entwurf von Entzerrerschaltungen. Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 14 (1965), S. 183 - 191.
- [7] R. UNBEHAUEN: Über die Synthese von Dämpfungsentzerrern in Form eines Überbrückten T-Gliedes. Nachrichtentechn. Z. 19 (1966), S. 729 - 737.
- [8] O. BRUNE: Synthesis of a finite two-terminal network, whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency. J. Math. Phys. 10 (1931), S. 191 - 236.
- [9] R. UNBEHAUEN: Neuartige Verwirklichung von Zweipolfunktionen durch kanonische oder durch kopplungsfreie Schaltungen. Dissertation, Technische Hochschule Stuttgart 1957.
- [10] R. BOTT und R.J. DUFFIN: Impedance synthesis without use of transformers. J. Appl. Phys. 20 (1949), S. 816.

- [11] R. UNBEHAUEN: Synthese elektrischer Netzwerke. R. Oldenbourg Verlag, München Wien 1972.
- [12] H. KAMPFHENKEL: Ein einfaches Approximationsverfahren für Dämpfungsentzerrer. Nachrichtentechn. Z. 22 (1969), S. 475 - 480.
- [13] G. WUNSCH: Theorie und Anwendung linearer Netzwerke, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1961.
- [14] M. REICHERT: Die kanonisch und Übertragerfrei realisierbaren Zweipolfunktionen zweiten Grades. Arch. Elektr. Übertr. 23 (1969), S. 201 - 208.
- [15] R.M. FOSTER und E.L. LADENHEIM: A class of biquadratic impedances. IEEE Trans. CT 10 (1963), S. 262 - 265.
- [16] E.C. HO: RLC transfer function synthesis. IRE Trans. CT 3 (1956), S. 188 - 190.
- [17] R. FLETCHER und M.J.D. POWELL: A rapidly convergent descent method for minimization. Comp. J. 6 (1963), S. 163 - 168.
- [18] M.J.D. POWELL: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. Comp. J. 7 (1964), S. 155 - 162.
- [19] B. GAISSMAIER: Dissertation (in Vorbereitung), Universität Erlangen-Nürnberg.
- [20] R. UNBEHAUEN, W. HOHNEKER und E. LAMPERT: Über die Synthese von Vierpolen mit vorgeschriebener Impulsantwort. Arch. Elektr. Übertr. 19 (1965), S. 339 - 349.

Lebenslauf

Geboren am 19. Februar 1941

Eltern: Wilhelm Hohneker,
Angestellter im öffentlichen Dienst
Auguste Hohneker, geb. Eberhard

Volksschule: Von 1946 bis 1950 in Gerlingen bei Stuttgart

Gymnasium: Von 1950 bis 1959 in Stuttgart-Feuerbach
Reifeprüfung am 3. März 1959 abgelegt

Praktikum: Von April bis September 1959 bei der
Firma Standard-Elektrik Lorenz AG
in Stuttgart-Zuffenhausen

Studium: Von WS 1959/60 bis WS 1964/65
Studium der Fachrichtung Elektrotechnik
an der Technischen Hochschule Stuttgart
Diplomprüfung am 26. Februar 1965 abgelegt

Wiss. Assistent: Von Juni 1965 bis Februar 1967 am
Rechenzentrum der Technischen Hochschule
Stuttgart
Seit März 1967 am Institut für Allgemeine
und Theoretische Elektrotechnik der
Universität Erlangen-Nürnberg. Während
dieser Zeit entstand die vorliegende Arbeit

Copie - Center 2000
852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30